IN3171 - Modelamiento y Optimización

Auxiliar Nº 6 - Más Simplex

Profesores: Azucena Orellana, Benjamin Barrientos, Matías Romero
Auxiliares: Matías Muñoz, Ignacia Segura, Javier Madariaga, Marian Mazurett

Pregunta 1

Considere el siguiente poliedro: $P = \{x \in \mathbb{R}^6\ :$

$$\begin{array}{cccccccl} x_1 & -x_2 & +x_3 & & & & = & 0 \\ 2x_1 & +3x_2 & & +x_4 & & & = & 20 \\ & x_2 & & & +x_5 & +x_6 & = & 6 \\ & & & & & x_i & \geq & 0 \quad \forall i \in \{1,\ldots,6\}\} \end{array}$$

1. Muestre que las bases $\{3, 4, 5\}$ y $\{3, 4, 6\}$ son degeneradas.
2. Explique si son o no bases adyacentes.
3. Considere el poliedro en forma estándar $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$. Suponga que $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tiene filas linealmente independientes y que cada solución básica factible es no-degenerada. Sea x un elemento de P con exactamente m componentes positivas. Muestre que x es SBF de P
4. Muestre un contraejemplo que demuestre que el resultado de la parte (c) no es válido removiendo el supuesto de no-degenerancia.

Pregunta 2

Considere el siguiente problema de optimización :

$$\begin{array}{lcccl} \min & x_1 & +x_2 & & \\ & 5x_1 & +x_2 & \geq & 5 \\ & x_1 & +4x_2 & \geq & 20 \\ & x_1 & +x_2 & \leq & 20 \\ & & & & \\ & x_1, & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

1. Escriba el poliedro en forma standard.
2. Grafique el poliedro en forma standard. Indique como se comportan las variables de holgura en este poliedro .
3. Desde el punto (0,20) en el poliedro original, escriba su valor en forma standard e indique sus base asociadas.
4. Resuelva el problema realizando una iteración simplex. Indique en el poliedro la dirección de movimiento, las bases y como varías las variables de holgura al moverse de un punto a otro.

Algoritmo Símplex

Dados $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ de rango m, $b \in \mathbb{R}^m$ y $c \in \mathbb{R}^n$, el algoritmo símplex resuelve el problema

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} & c^t x \\ \text{s.a.} & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{array}$$

1. **Inicialización:**
   Encontrar una base factible B, cuyas columnas denotaremos por $A_{B(1)}, \ldots, A_{B(m)}$.
   Definir índices básicos y no básicos: $\mathcal{B} := \{B(1), \ldots, B(m)\}$, $\quad \mathcal{N} := \{1, \ldots, n\} \setminus \mathcal{B}$.
   Calcular B^{-1}, $\quad x_B := B^{-1}b$, $\quad z := c_B^t x_B$.

2. **Test de optimalidad:**
   Calcular los multiplicadores símplex: $p^t := c_B^t B^{-1}$.
   Calcular los costos reducidos: $\bar{c}_j := c_j - p^t A_j \ \forall j \in \mathcal{N}$.
   Si $\forall\, j \in \mathcal{N},\ \bar{c}_j \geq 0$, terminar (estamos en el óptimo).
   Si no, sea $j \in \mathcal{N}$ tal que $\bar{c}_j < 0$.

3. **Test de factibilidad:**
   Calcular $u := B^{-1}A_j$.
   Calcular $\mathcal{I} := \{i \in \{1, \ldots, m\} \mid u_i > 0\}$.
   Si $\mathcal{I} = \emptyset$, terminar (el problema es no acotado).
   Si no, calcular $\theta^* := \min\limits_{i \in \mathcal{I}} \frac{x_{B(i)}}{u_i}$ y $\ell \in \mathcal{I}$ tal que $\theta^* = \frac{x_{B(\ell)}}{u_\ell}$.

4. **Actualizar:**
   Formar una nueva base B reemplazando $A_{B(\ell)}$ por A_j en la base anterior.
   $\mathcal{B} := \mathcal{B} \setminus \{B(\ell)\} \cup \{j\}$, $\quad \mathcal{N} := \mathcal{N} \setminus \{j\} \cup \{B(\ell)\}$
   Decimos que x_j entra a la base y $x_{B(\ell)}$ sale de ella.
   $x_j := \theta^*$, $\quad x_{B(i)} := x_{B(i)} - \theta^* u_i$ para $i \neq \ell$.
   $z := z + \theta^* \bar{c}_j$.
   Calcular $B^{-1}(*)$.
   Ir a 2.