IN3171 - Modelamiento y Optimización

Control 1

Profesores: Benjamín Barrientos, Azucena Orellana, Matías Romero.
Auxiliares: Javier Madariaga, Marian Mazurret, Matías Muñoz, Ignacia Segura.

1 Modelamiento

Suponga que una gran empresa ya tiene asignados los turnos de sus guardias en días laborales, pero necesitan su asesoría para asignar los días feriados. Específicamente se tienen k periodos festivos (semana santa, fiestas patrias, navidad, etc) y cada uno de ellos abarca un número de días consecutivos, que tienen que ser cubiertos con al menos un guardia por día. Diremos que el conjunto de días de la festividad $j = 1, \ldots, k$ es D_j, con lo que $D = \bigcup_{j=1}^{k} D_j$ representa el total de días festivos. Cada guardia $i \in \{1, \ldots, n\}$ puede trabajar en un subconjunto de días $S_i \subseteq D$, y no debe trabajar en más de c días festivos. Además, en cada periodo festivo j, cada guardia debe trabajar a lo más un día de D_j.

1. (2 pts.) Modele este problema como uno de flujo máximo, describiendo precisamente los nodos y arcos del grafo $G = (V, A)$, además de las capacidades c_a de cada arco $a \in A$.

   Hint: Modele primero el problema sin la restricción de trabajar a lo más un día en cada periodo festivo (recuerde la Tarea 2). Para incorporar esta restricción al modelo anterior, le puede ser útil considerar, para cada guardia, un nodo por periodo festivo (en total n copias de k nodos), por los que no debe pasar más de una unidad de flujo.

2. (3 pts.) Dibuje el grafo correspondiente a la siguiente instancia: 3 guardias y dos periodos festivos: semana santa (V, S y D) y fiestas patrias (D18 y L19). Suponga que los guardias pueden trabajar hasta 3 días en total, pero el primero solo puede trabajar los fines de semana y el segundo no puede trabajar los domingos, mientras que el tercero no tiene restricciones. Considere ahora la solución factible del modelo de flujo donde el primer guardia es asignado a (S y 18D), el tercero a (V, 19L), y el segundo no tiene turnos asignados: justifique que esta solución es factible en el modelo de flujo, pero no cumple todas las condiciones del problema descrito en el enunciado y realice una iteración el algoritmo de Ford-Fulkerson para encontrar una solución óptima a partir de ella que sí cumpla todas las condiciones del enunciado.

3. (1 pt.) Defina un modelo alternativo del problema sin ocupar la estructura de grafo.

2 Poliedros en forma estándar y SBF

Considere el siguiente problema de optimización lineal

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1 + x_2 \\ \text{s.a.} \quad & 3x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

1. (2 pts.) Dibuje la región factible e identifique todos los vértices y justifique por qué son soluciones básicas factibles, explicitando si son degeneradas o no.

2. (1 pt.) Encuentre gráficamente una solución óptima del problema.

3. (1.5 pts.) Modifique la función objetivo de forma que existan infinitas soluciones óptimas.

4. (1.5 pts.) Escriba el problema en forma estándar.

3 Geometría

1. Indique si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas. Justifique su respuesta o de un contraejemplo en cada caso.

   a) (1 pt.) Si el poliedro de un problema de minimización no posee puntos extremos, entonces el problema es no acotado.

   b) (1 pt.) Considere el poliedro en forma estándar $P = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}$ y el problema de minimización $c'x$ sujeto a $x \in P$. Si existe más de una solución óptima, entonces hay una cantidad infinita de soluciones óptimas.

   c) (1 pt.) Toda solución óptima posee a lo más m componentes no cero. *Hint:* Considere el caso cuando existen infinitas soluciones.

2. Sea $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ una colección de vectores en $\mathbb{R}^m$, no necesariamente linealmente independientes (con $m < n$).

   a) (3 pts.) Sea
   $$C = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{A}_i \;\middle|\; \lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0 \right\}.$$
   Muestre que cualquier elemento de C puede ser expresado en la forma $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{A}_i$, con $\lambda_i \geq 0$ y con a lo más m de los coeficientes λ_i distintos de 0. *Hint:* Considere $\mathbf{y} \in C$ y las soluciones básicas factibles del poliedro (¿por qué existe alguna?):
   $$\Lambda_{\mathbf{y}} = \left\{ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{A}_i = \mathbf{y},\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0 \right\}.$$

   b) (Bonus, 1.5 pts.) Sea P la envoltura convexa de los vectores $\mathbf{A}_i$:
   $$P = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{A}_i \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0 \right\}.$$
   Muestre que cualquier elemento de P puede ser expresado en la forma $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{A}_i$, donde $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ y $\lambda_i \geq 0$ para todo i, a lo más $m+1$ de los coeficientes λ_i distintos de 0. *Hint:* Considere el poliedro
   $$\hat{\Lambda}_{\mathbf{y}} = \left\{ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{A}_i = \mathbf{y}, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0 \right\}.$$