Departamento de Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA1001: Introducción al Cálculo 2022-1

Pauta de corrección Control Recuperativo

P1. a) **(6 puntos)** Resuelva la ecuación $\cos(2x) + \cos(4x) = 0$.

Solución: Usando la fórmula del ángulo doble, se tiene que la ecuación es equivalente a:

$$\iff \quad \cos(2x) + 2\cos^2(2x) - 1 = 0$$

1.5

$$\iff \quad \big(\cos(2x)+1\big)\big(2\cos(2x)-1\big) = 0$$

$$\iff \quad \cos(2x) = -1 \quad \vee \quad \cos(2x) = \frac{1}{2}.$$

1.5

La solución de cada ecuación es:

$$\cos(2x) = -1 \iff 2x = 2k\pi + \pi \iff x = k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

1.5

$$\cos(2x) = \frac{1}{2} \iff 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \iff x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}, \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

1.5

Solución alternativa: Usando la identidad $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$ la ecuación es equivalente a:

$$\iff \quad \cos(x)\cos(3x) = 0$$

1.5

$$\iff \quad \cos(x) = 0 \quad \vee \quad \cos(3x) = 0.$$

1.5

La solución de cada ecuación es:

$$\cos(x) = 0 \iff x = k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

1.5

$$\cos(3x) = 0 \iff 3x = k\pi + \frac{\pi}{2} \iff x = k\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}, \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

1.5

b) **(6 puntos)** Un punto móvil $P(\alpha, \beta)$ del plano se une con los puntos $A(0, b)$ y $B(0, -b)$ del eje OY ($b > 0$), determinando las rectas PA y PB. Considere que $\alpha \neq 0$ y $|\beta| \neq b$.
Las rectas PA y PB cortan al eje OX en los puntos Q y R respectivamente.
Si se sabe que $x_Q \cdot x_R = 4b^2$ (abscisas de Q y R respectivamente), determine el Lugar Geométrico que recorre el punto P.

Solución: Recta PA:

$$y - b = \frac{\beta - b}{\alpha} x$$

1.0

Recta PB:

$$y + b = \frac{\beta + b}{\alpha} x$$

1.0

Intersección de la recta PA con OX:

$$x_Q = \frac{-b\alpha}{\beta - b}$$

1.0

Intersección de la recta PB con OX:

$$x_R = \frac{b\alpha}{\beta + b}$$

1.0

La condición $x_Q \cdot x_R = 4b^2$ es equivalente a:

$$\frac{-b\alpha}{\beta - b} \cdot \frac{b\alpha}{\beta + b} = 4b^2 \iff \frac{-\alpha^2}{\beta^2 - b^2} = 4$$

$$\iff -\alpha^2 = 4\beta^2 - 4b^2 \iff \frac{\alpha^2}{4b^2} + \frac{\beta^2}{b^2} = 1$$

1.0

El punto P se mueve sobre la elipse de semiejes $2b$ y b.

1.0

P2. (6 puntos) Estudie completamente la función definida por $f(x) = \dfrac{2x - 6}{x + 3}$, indicando: dominio, ceros, signos, intersección con el eje OY, asíntotas, crecimientos , conjunto imagen ($\mathrm{Im}(f)$) y gráfico.

Solución: Dominio: $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

0.5

Ceros: $x = 3$

0.5

$f(x) > 0 \iff x \in (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$

0.5

$f(x) < 0 \iff x \in (-3, 3)$

0.5

Intersección con el eje OY: $(0, -2)$

0.5

Asíntota Vertical: $x = -3$

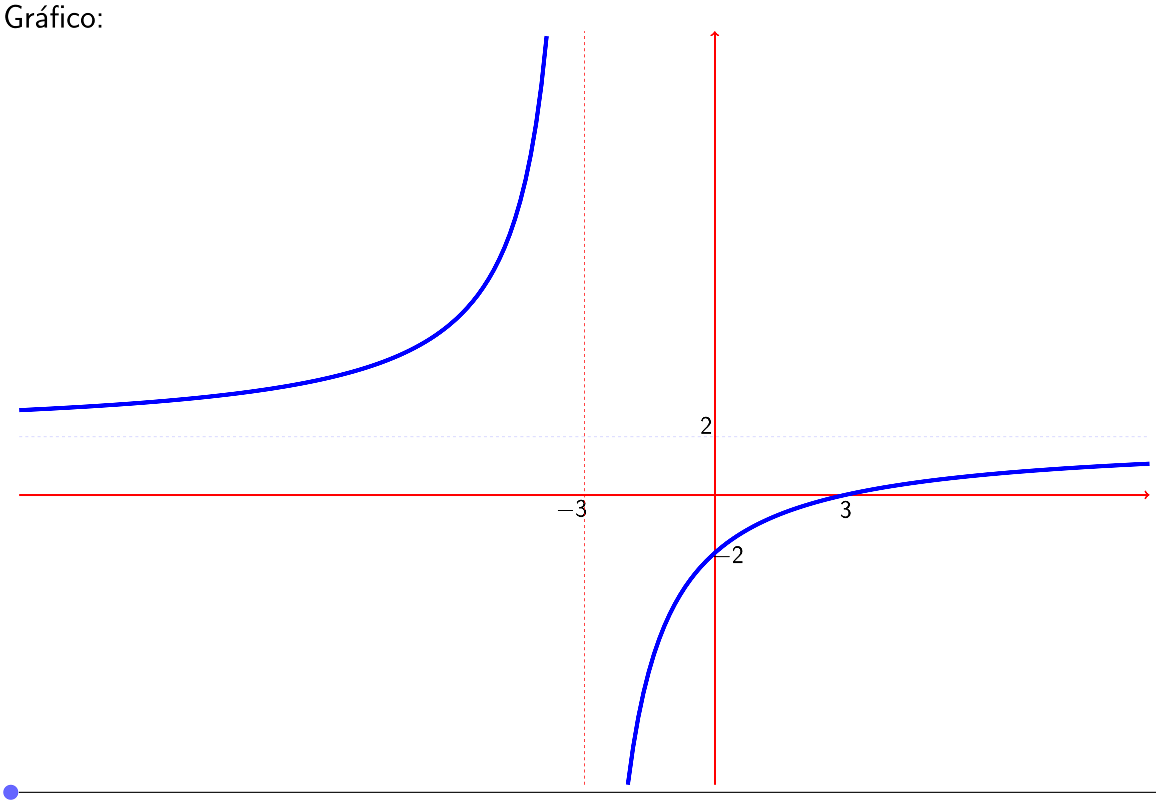
Asíntota horizontal: $y = 2$

(1.0 ptos por una de las asíntotas y 0.5 por la otra.) 1.5

Crecimiento: $f(x) = \dfrac{2x-6}{x+3} = 2 - \dfrac{12}{x+3}$ es creciente en $(-\infty, -3)$ y en $(-3, \infty)$ 1.0

Conjunto Imagen: $(2, \infty) \cup (-\infty, 2) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ 0.5

Gráfico:



0.5