Auxiliar 1

Axiomas de cuerpo

Profesor: Raúl Gormaz
Auxiliar: Joaquín López

P1.- Usando solo los axiomas de cuerpo de los números reales y los teoremas de unicidad de neutro e inversos, demuestre las siguientes propiedades fundamentando cada paso (si requiere alguna propiedad extra, debe demostrarla!). **Nota:** $x^2 := x \cdot x$

1. $\forall x, y \in \mathbb{R} \neq 0, (x \cdot y)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1}$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 = 0 \implies x = 0$
3. Si existiera $a \neq 0$ tq, $a + a = 0$ concluya que $\forall x \in \mathbb{R}, x + x = 0$
4. $\forall x, y \in \mathbb{R}, -(x \cdot y) = (-x) \cdot y$

P2.- Verifique las siguientes proposiciones. Previamente definamos a $x^2 := x \cdot x$ para cualquier real x.

1. $\forall a, b \in \mathbb{R}, a \cdot b = 0 \implies (a+b)^2 = a^2 + b^2$
2. $\forall a, c \in \mathbb{R}, \forall b, c \in \mathbb{R}^*$ se tiene que:
$$a(b+d) = b(a+c) \implies ab^{-1} = cd^{-1}$$
3. $\forall a \in \mathbb{R}, -a = (-1)a$
4. $\forall a \in \mathbb{R}^*, (a^{-1})^{-1} = a$

P3.- **(Propuesto?)**
El objetivo de este problema es demostrar que, en el campo de los números reales, la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} a \cdot x &= b \\ a &\neq 0 \end{aligned}$$

Tiene solución única. Para ello procedamos como siga:

(a) Asuma que la ecuación anterior tiene solución y encuentre un candidato $x' \in \mathbb{R}$ que pueda satisfacerla.

(b) Verifique que el x' encontrado en la parte anterior efectivamente es una solución.

(c) Demuestre que la solución es única.