Pauta 1

owo

Profesor: Raul Gormaz
Auxiliar: Joaquin Lopez

P1.- **Solución:**

1. Sea $x, y \in \mathbb{R}^*$ Recordemos que por el teorema de unicidad de inversos, solo basta verificar que

$$(xy) \cdot (y^{-1}x^{-1}) = 1$$

y luego concluir que como es inverso y es único, se tiene que $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$. Veamos que se cumple la ecuación entonces !

$$\begin{aligned}
(xy) \cdot (y^{-1}x^{-1}) &= ((xy) \cdot y^{-1}) \cdot x^{-1} && \text{(Asociatividad)} \\
&= (x \cdot (yy^{-1})) \cdot x^{-1} && \text{(Asociatividad)} \\
&= (x \cdot 1) \cdot x^{-1} && \text{(Def inverso)} \\
&= x \cdot x^{-1} && \text{(Elemento Neutro mult)} \\
&= 1 && \text{(Def inverso)}
\end{aligned}$$

$\square$

2. Sea $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 = 0$ verifiquemos que se tiene $x = 0$.

Primero recordemos el siguiente teorema:

Dados $a, b \in \mathbb{R}$, si se cumple que $a \cdot b = 0$ entonces se tiene que $a = 0 \vee b = 0$ (Ojo hay que demostrar el teorema, pero quedara al final del problema).

Notemos que con este teorema tenemos de manera directa que instanciando a con x y b con x que $x \cdot x = 0 \implies x = 0 \vee x = 0 \iff x = 0$ (aquí se uso que $p \vee p \iff p$) y por lo tanto:

$$x^2 = 0 \implies x = 0 \qquad \square$$

3. Primero desarrollemos la expresión $a + a$ y usemos que $a + a = 0$

$$\begin{aligned}
a + a &= a \cdot 1 + a \cdot 1 && \text{(Elemento neutro mult x2)} \\
&= a(1 + 1) && \text{(Distributividad)} \\
&= 0 && (a + a = 0)
\end{aligned}$$

Luego usando el teorema anterior, como el producto $a(1+1) = 0 \implies a = 0 \vee (1 + 1 = 0)$ pero recordemos que $a \neq 0$, y por lo tanto $1 + 1 = 0$.

De aquí podemos ver que, dado $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
x + x &= x \cdot 1 + x \cdot 1 && \text{(Elemento neutro mult x2)} \\
&= x(1+1) && \text{(Distributividad)} \\
&= x \cdot 0 && (1+1=0) \\
&= 0 && \text{(Propiedad } a \cdot 0\text{)}
\end{aligned}$$

$\square$

4. Dados $x, y \in \mathbb{R}$, de manera similiar a 1) por el teorema de unicidad de inversos, solo basta verificar que

$$xy + (-x)y = 0$$

y por unicidad concluir la igualdad buscada, osea $-(xy) = (-x)y$.

Verifiquémoslo:

$$\begin{aligned}
xy + (-x)y &= (x + (-x)) \cdot y && \text{(Distributividad)} \\
&= 0 \cdot y && \text{(Definición Opuesto)} \\
&= y \cdot 0 && \text{(Conmutatividad)} \\
&= 0 && \text{(Propiedad } a \cdot 0\text{)}
\end{aligned}$$

$\square$

5. **Demostración de los teoremas**:

Demostremos la propiedad $\forall a \in \mathbb{R}, a \cdot 0 = 0$.

En efecto, dado $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
a \cdot 0 &= a \cdot 0 + 0 && \text{(Elemento Neutro suma)} \\
&= a \cdot 0 + (a + (-a)) && (a + (-a) = 0 \text{ pues } a \in \mathbb{R}) \\
&= (a \cdot 0 + a) + (-a) && \text{(Asociatividad)} \\
&= (a \cdot 0 + a \cdot 1) + (-a) && \text{(Elemento Neutro mult)} \\
&= a(0+1) + (-a) && \text{(Distributividad)} \\
&= a(1+0) + (-a) && \text{(Conmutatividad)} \\
&= a \cdot 1 + (-a) && \text{(Elemento Neutro suma)} \\
&= a + (-a) && \text{(Elemento Neutro mult)} \\
&= 0 && \text{(Definición Opuesto)}
\end{aligned}$$

$\square$

Ahora veamos el teorema mencionado anteriormente y demostrémoslo!

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, a \cdot b = 0 \implies a = 0 \lor b = 0$$

En efecto podemos proceder por contra-reciproca y es equivalente a demostrar que

$$a \neq 0 \land b \neq 0 \implies a \cdot b \neq 0$$

entonces demostremos que $a \cdot b \neq 0$.

Sean $a, b \neq 0$ entonces sabemos que existen los recíprocos de a y b, pues son distintos de 0. Luego basta con mostrar que $a \cdot b$ tiene reciproco (pues si encontramos uno, directamente tenemos que no puede ser 0, si no seria una contradicción con que 0 no tiene reciproco), entonces propongamos el siguiente real $b^{-1} \cdot a^{-1}$ y veamos que sea inverso de ab

$$\begin{aligned}
(ab) \cdot (b^{-1}a^{-1}) &= ((ab)b^{-1})a^{-1} && \text{(Asociatividad)} \\
&= (a(bb^{-1}))a^{-1} && \text{(Asociatividad)} \\
&= (a \cdot 1)a^{-1} && \text{(Definicion Inverso)} \\
&= aa^{-1} && \text{(Elemento Neutro mult)} \\
&= 1 && \text{(Definicion Inverso)}
\end{aligned}$$

$\square$

P2.- **Solución**

1. Dados $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a \cdot b = 0$, demostremos la igualdad

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2$$

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= (a+b)(a+b) && \text{(Por definición)} \\
&= a(a+b) + b(a+b) && \text{(Distributividad)} \\
&= (a \cdot a + ab) + (ba + b \cdot b) && \text{(Distributividad x2)} \\
&= (a \cdot a + ab) + (ab + b \cdot b) && \text{(Conmutatividad)} \\
&= (a \cdot a + 0) + (0 + b \cdot b) && (ab = 0) \\
&= a \cdot a + (0 + b \cdot b) && \text{(Elemento Neutro Suma)} \\
&= a \cdot a + (b \cdot b + 0) && \text{(Conmutatividad)} \\
&= a \cdot a + b \cdot b && \text{(Elemento Neutro Suma)} \\
&= a^2 + b^2 && \text{(Definición } x^2\text{)}
\end{aligned}$$

$\square$

2. Dados $a, c \in \mathbb{R}$ y $b, d \in \mathbb{R}^*$, como se cumple que $a(b+d) = b(a+c)$, usemos esto para encontrar alguna igualdad útil

$$\begin{aligned}
ab + ad &= ba + bc && \text{(Distributividad)} \\
ab + ad &= ab + bc && \text{(Conmutiatividad)} \\
-(ab) + (ab + ad) &= -(ab) + (ab + bc) && \text{-(ab)} \\
(-(ab) + ab) + ad &= (-(ab) + ab) + bc && \text{(Asociatividad)} \\
(ab + -(ab)) + ad &= (ab + -(ab)) + bc && \text{(Conmutatividad)} \\
0 + ad &= 0 + bc && \text{(Definición Opuesto)} \\
ad + 0 &= bc + 0 && \text{(Conmutiatividad)} \\
ad &= bc && \text{(Elemento Neutro suma)}
\end{aligned}$$

Ahora que sabemos esta igualdad veamos que $ab^{-1} = cd^{-1}$

$$\begin{aligned}
ab^{-1} &= (a \cdot 1) \cdot b^{-1} && \text{(Elemento Neutro mult)} \\
&= (a(dd^{-1})) \cdot b^{-1} && (dd^{-1} = 1) \\
&= (ad)(d^{-1}b^{-1}) && \text{(Asociatividad)} \\
&= (bc)(d^{-1}b^{-1}) && (ad = bc) \\
&= (cb)(b^{-1}d^{-1}) && \text{(Conmutatividad x2)} \\
&= ((cb)b^{-1})d^{-1} && \text{(Asociatividad)} \\
&= (c(bb^{-1}))d^{-1} && \text{(Asociatividad)} \\
&= (c \cdot 1)d^{-1} && \text{(Definición Reciproco)} \\
&= cd^{-1} && \text{(Elemento Neutro mult)}
\end{aligned}$$

$\square$

3. Dado $a \in \mathbb{R}$ veamos que sea opuesto

$$\begin{aligned}
a + (-1)a &= a \cdot 1 + (-1)a && \text{(Elemento Neutro mult)} \\
&= (1 + (-1))a && \text{(Distributividad)} \\
&= 0 \cdot a && \text{(Definición Opuesto)} \\
&= a \cdot 0 && \text{(Conmutatividad)} \\
&= 0 && \text{(Propiedad } a \cdot 0\text{)}
\end{aligned}$$

$\square$

4. Dado $a \in \mathbb{R}^*$ notemos que la ecuación se traduce en que

$$a^{-1} \cdot a = 1$$

lo cual se tiene, pues es solo aplicar conmutatividad en el producto.

P3.- **Solución:**

(a) Encontremos este candidato.
desarrollando:

$$\begin{aligned}
ax = b \implies a^{-1}(ax) &= a^{-1}b && (/ \cdot a^{-1}) \\
(a^{-1}a)x &= a^{-1}b && \text{(Asociatividad)} \\
(aa^{-1})x &= a^{-1}b && \text{(Conmutatividad)} \\
1 \cdot x &= a^{-1}b && \text{(Definición inverso)} \\
x \cdot 1 &= a^{-1}b && \text{(Conmutatividad)} \\
x &= a^{-1}b && \text{(Elemento Neutro)}
\end{aligned}$$

(b) Sea $x' = a^{-1}b$ veamos que es solución de la ecuación:

$$\begin{aligned} ax' &= a(a^{-1}b) && \\ &= (aa^{-1})b && \text{(Asociatividad)} \\ &= 1 \cdot b && \text{(Definición Inverso)} \\ &= b \cdot 1 && \text{(Conmutatividad)} \\ &= b && \text{(Elemento Neutro)} \end{aligned}$$

(c) Demostremos que la solución es única, sean x_1 y x_2 Soluciones de la ecuación. demostremos que $x_1 = x_2$. Como solucionan la ecuación se cumple que

$$ax_1 = b \;\;\&\;\; ax_2 = b$$

Ahora:

$$\begin{aligned} ax_1 &= ax_2 && \text{(Transitividad igualdad)} \\ a^{-1}(ax_1) &= a^{-1}(ax_2) && (/ \cdot a^{-1}) \\ (a^{-1}a)x_1 &= (a^{-1}a)x_2 && \text{(Asociatividad)} \\ (aa^{-1})x_1 &= (aa^{-1})x_2 && \text{(Conmutatitivdad)} \\ 1 \cdot x_1 &= 1 \cdot x_2 && \text{(Def inverso)} \\ x_1 \cdot 1 &= x_2 \cdot 1 && \text{(Conmutatividad)} \\ x_1 &= x_2 && \text{(Elemento Neutro)} \end{aligned}$$