Pauta 2

uwu

Profesor: Raul Gormaz
Auxiliar: Joaquin Lopez

P1.- **Solución:**

1. Sea $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ tomemos la desigualdad y veamos equivalencias !

$$
\begin{aligned}
2 \leq \frac{x}{y} + \frac{y}{x} &\iff 2 \leq \frac{x^2 + y^2}{xy} \\
&\iff 2xy \leq x^2 + y^2 \qquad / \cdot xy \text{ (como } x, y > 0\text{, por clausura } xy > 0) \\
&\iff 0 \leq x^2 - 2xy + y^2 \\
&\iff 0 \leq (x-y)^2 \\
&\iff True
\end{aligned}
$$

   Notemos que la ultima equivalencia es cierta, pues por propiedad $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$.

2. Sea $x \in \mathbb{R}_+^*$, notemos que es un caso particular de el problema 1, ya que como se cumple $\forall y \in \mathbb{R}_+^*$ en particular se cumple para $y = 1 > 0$.

3. Sea $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, trabajemos con la expresión

$$
\begin{aligned}
(x+y)(x^{-1} + y^{-1}) &= xx^{-1} + xy^{-1} + yx^{-1} + yy^{-1} \\
&= 1 + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 1 \\
&= 2 + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}
\end{aligned}
$$

   Luego, notemos que como $2 \leq \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$, por lo tanto sumando 2 tenemos que:

$$
2 + 2 \leq 2 + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \iff 4 \leq 2 + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}
$$

   y por lo tanto, concluimos que

$$
4 \leq (x+y)(x^{-1} + y^{-1})
$$

4. Sea $x, y \in \mathbb{R}^*_+$ tales que $x^2 + y^2 = 4$, notemos que podemos trabajar la siguiente expresión

$$\begin{aligned}
(x-y)^2 \geq 0 &\iff x^2 + y^2 \geq 2xy \\
&\iff 4 \geq 2xy && (x^2 + y^2 = 4) \\
&\implies 4 \geq 2xy > 0 && (x, y > 0 \text{ por clausura } xy > 0) \\
&\implies 16 \geq 4x^2y^2 && (\text{por clausura multiplicación}) \\
&\iff 4 \geq x^2y^2 && (/ \cdot 4^{-1})
\end{aligned}$$

5. Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$ recordemos las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned}
a^2 + b^2 &\geq 2ab \\
a^2 + c^2 &\geq 2ac \\
c^2 + b^2 &\geq 2cb
\end{aligned}$$

Entonces podemos sumar las 3 expresiones (Propiedad de Orden 6) obteniendo el siguiente resultado

$$\begin{aligned}
&2a^2 + 2b^2 + c^2 \geq 2ab + 2ac + cb \\
\iff &\ a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + cb && (2^{-1} > 0) \text{ y prop 4a)}
\end{aligned}$$

P2.- **Solución**

1. Sea $x \in A$, entonces x cumple que:

$$\begin{aligned}
\frac{x-4}{x-5} \geq \frac{x-5}{x-8} &\iff \frac{x-4}{x-5} - \frac{x-5}{x-8} \geq 0 \\
&\iff \frac{(x-4)(x-8) - (x-5)^2}{(x-5)(x-8)} \geq 0 && (\text{mínimo común entre fracciones}) \\
&\iff \frac{x^2 - 12x + 32 - x^2 + 10x - 25}{(x-5)(x-8)} \geq 0 \\
&\iff \frac{-2x + 7}{(x-5)(x-8)} \geq 0
\end{aligned}$$

Entonces ahora tenemos que hacer un análisis de signo (la tablita), primero encontremos los puntos críticos!, que es cuando alguno de los factores se hacen 0

$$x_c \in \{\frac{7}{2}, 5, 8\}$$

Luego los ordenamos y vamos viendo por intervalos !

	(-∞ ,$\frac{7}{2}$)	($\frac{7}{2}$,5)	(5,8)	(8,∞)
$-2x+7$	+	-	-	-
$x-5$	-	-	+	+
$x-8$	-	-	-	+
%	+	-	+	-

donde $\% = \frac{-2x+7}{(x-5)(x-8)}$, luego notemos que, donde el signo es positivo es donde se cumple la desigualdad!, o sea que por el momento la solución es:

$$(-\infty, \frac{7}{2}) \cup (5, 8)$$

solo queda ver los bordes, osea los puntos críticos.

Directamente tenemos que 5 y 8 no pueden estar en la solución, pues indefinen la expresión $\%$. ahora para el caso de $\frac{7}{2}$, como anula a $\%$ si cumple la inecuación, pues $0 \geq 0$ es cierto.

Luego la solución es:

$$(-\infty, \frac{7}{2}] \cup (5, 8)$$

2. **Solución 1**:

Trabajemos la expresión y completemos cuadrado:

$$\begin{aligned} x^2 + 2kx + k =& x^2 + 2kx + k^2 + k - k^2 \qquad\qquad (0 = k^2 - k^2) \\ =& (x+k)^2 + k - k^2 > 0 \end{aligned}$$

Entonces lo que queremos es que la expresión anterior sea mayor a 0 **Para todo x en** $\mathbb{R}$, esto es en particular para $x = -k$, que reemplazando tenemos que:

$$k - k^2 > 0$$

Esta es una desigualdad que podemos trabajar!

$$k - k^2 > 0 \iff k(1-k) > 0$$

luego basta con hacer una tabla similar al problema anterior y ver cuando el signo es positivo (pues nos piden que sea > 0).

	$(-\infty$,0)	(0,1)	(1,∞)
k	+	+	+
$1-k$	-	+	-
$\%$	-	+	-

Notar que los bordes no importan, pues la desigualdad es estricta! Luego los $k \in (0, 1)$ satisfacen la desigualdad pedida $\forall x \in \mathbb{R}$, pues $(x+k)^2 \geq 0 \wedge k - k^2 > 0 \implies (x+k)^2 + k - k^2 > 0$.

Solución 2:

Notemos que como es una inecuación cuadrática, basta con ver si el discriminante $\Delta < 0$ y así nos aseguramos que no cambia de signo, y luego verificamos que es positivo para obtener el resultado.

Estudiemos el discriminante, recordemos que para una ecuación cuadrática de forma ax^2+bx+c

su discriminante se define como $\Delta = b^2 - 4ac$, impongamos que $\Delta < 0$

$$\begin{aligned}
\Delta < 0 &\iff (2k)^2 - 4k < 0 \\
&\iff 4k^2 - 4k < 0 \\
&\iff k^2 - k < 0 && / \cdot \frac{1}{4} \\
&\iff k - k^2 > 0 && / \cdot (-1)
\end{aligned}$$

Notemos que llegamos a la misma inecuación $k - k^2 > 0$ que sabemos que tiene solución $(0, 1)$, luego como sabemos esa solución, basta con chequear que en algún lugar es positivo, ya que no cambia de signo!, en efecto reemplazando $x = -k$ queda que

$$k^2 - 2k^2 + k = k - k^2 > 0$$

Luego en $x = -k$ es positivo y por lo tanto toda la expresión es positiva! se concluye entonces que para todo $x \in \mathbb{R}$

$$x^2 + 2kx + k > 0$$

3. a) Veamos la primera inecuación $|x - 3| \leq \frac{1}{2}$. Lo resolveremos vía métodos de puntos críticos!, en este caso un punto es cuando la expresión dentro de valor absoluto es 0, como hay un solo valor absoluto, los puntos críticos serán

$$x_c \in \{3\}$$

. Luego dividiremos los números reales en intervalos con los puntos críticos y tomaremos x en esos intervalos.

- $x \in (-\infty, 3)$.
  En este intervalo ocurre que: $x - 3 < 0$ y por definición de valor absoluto queda que

$$\begin{aligned}
|x - 3| \leq \frac{1}{2} &\iff -(x - 3) \leq \frac{1}{2} && \text{(Definición valor absoluto)} \\
&\iff -x + 3 \leq \frac{1}{2} \\
&\iff \frac{5}{2} \leq x
\end{aligned}$$

  Luego $x \in (\frac{5}{2}, \infty)$ pero como $x \in (-\infty, 3)$, queremos que se cumplan ambos por lo tanto tomamos la intersección!

$$(\frac{5}{2}, \infty) \cap (-\infty, 3) = (\frac{5}{2}, 3)$$

- $x \in (3, \infty)$
  En este intervalo ocurre que: $x - 3 > 0$ y por definición de valor absoluto queda que

$$\begin{aligned}
|x - 3| \leq \frac{1}{2} &\iff x - 3 \leq \frac{1}{2} && \text{(Definición valor absoluto)} \\
&\iff x - 3 \leq \frac{1}{2} \\
&\iff x \leq \frac{7}{2}
\end{aligned}$$

Luego $x \in (-\infty, \frac{7}{2})$ pero como $x \in (3, \infty)$, queremos que se cumplan ambos por lo tanto tomamos la intersección!

$$(-\infty, \frac{7}{2}) \cap (3, \infty) = (3, \frac{7}{2})$$

Luego la solución tentativa es la unión de las dos soluciones anteriores

$$(\frac{5}{2}, 3) \cup (3, \frac{7}{2})$$

pero faltan ver los bordes, de aquí es fácil ver que $3, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}$ si están en la solución, pues es solo reemplazar en la desigualdad y ver que la cumplen, por lo tanto la solución es:

$$[\frac{5}{2}, \frac{7}{2}]$$

b) $2|x| - |x-1| < 0$ Veamos que los puntos críticos son $x_c \in \{0, 1\}$

- $x \in (-\infty, 0)$
  En este caso $x < 0$ y $x - 1 < -1 < 0$, entonces aplicando la definición absoluto tenemos que:

$$\begin{aligned} 2|x| - |x-1| < 0 &\iff 2(-x) - (-(x-1)) < 0 \qquad \text{(Definición valor absoluto)} \\ &\iff -2x + x - 1 < 0 \\ &\iff -x - 1 < 0 \\ &\iff -1 < x \end{aligned}$$

  Luego $x \in (-1, \infty) \cap (-\infty, 0) = (-1, 0)$
- $x \in (0, 1)$ En este caso $x > 0$ y $x - 1 < 0$, entonces aplicando la definición absoluto tenemos que:

$$\begin{aligned} 2|x| - |x-1| < 0 &\iff 2x - -(x-1) < 0 \qquad \text{(Definición valor absoluto)} \\ &\iff 3x - 1 < 0 \\ &\iff x < \frac{1}{3} \end{aligned}$$

  Luego $x \in (-\infty, \frac{1}{3}) \cap (0, 1) = (0, \frac{1}{3})$
- $x \in (1, \infty)$ En este caso $x > 0$ y $x - 1 > 0$, entonces aplicando la definición absoluto tenemos que:

$$\begin{aligned} 2|x| - |x-1| < 0 &\iff 2x - (x-1) < 0 \qquad \text{(Definición valor absoluto)} \\ &\iff x + 1 < 0 \\ &\iff x < -1 \end{aligned}$$

  Luego $x \in (-\infty, -1) \cap (1, \infty) = \emptyset$

Unimos las 3 soluciones para obtener la solución total, notemos antes que 0 pertenece a la solución pues cumple la inecuación! $2 \cdot 0 - |0-1| = -1 < 0$ y que los bordes $-1, \frac{1}{3}$ no cumplen la inecuación!

Luego la solución es:

$$(-1,0) \cup (0, \frac{1}{3}) \cup \emptyset \cup \{0\} = (-1, \frac{1}{3})$$

c) Notemos que

$$\frac{x+2}{2x^2-3x} = \frac{x+2}{x(2x-3)} < 0$$

Entonces como esta factorizado solo quedan ver los puntos críticos y hacer la tablita! $x_c \in \{-2, 0, \frac{3}{2}\}$ y quedarnos con todos los puntos que tienen signo negativo pues nos piden que sea < 0.

	$(-\infty,-2)$	$(-2,0)$	$(0,\frac{3}{2})$	$(\frac{3}{2},\infty)$
$x+2$	-	+	+	+
x	-	-	+	+
$2x-3$	-	-	-	+
%	-	+	-	+

Notemos que los bordes en $0, \frac{3}{2}$ no están en la solución, pues indefinen la expresión, y que -2 tampoco cumple pues $0 < 0$ es falso.

Luego la solución es

$$(-\infty,-2) \cup (0, \frac{3}{2})$$

d) $|x-8| < x-2$

Igual que antes los puntos críticos son $x_c \in \{8\}$ vayamos por casos entonces:

- $x \in (-\infty, 8)$
  En este caso $x - 8 < 0$ entonces:

$$\begin{aligned} |x-8| < x-2 &\iff -(x-8) < x-2 && \text{(Definición valor absoluto)} \\ &\iff 10 < 2x \\ &\iff 5 < x && / \cdot \frac{1}{2} \end{aligned}$$

  Luego $x \in (5,\infty) \cap (-\infty, 8) = (5,8)$
- $x \in (8, \infty)$
  En este caso $x - 8 > 0$ entonces:

$$\begin{aligned} |x-8| < x-2 &\iff (x-8) < x-2 && \text{(Definición valor absoluto)} \\ &\iff -8 < -2 \\ &\iff True \end{aligned}$$

  Lo ultimo es cierto $\forall x \in \mathbb{R}$, entonces $x \in \mathbb{R} \cap (8,\infty) = (8,\infty)$

Ahora uniendo todas las soluciones parciales tenemos:

$$(5,8) \cup (8,\infty)$$

Pero notemos que el 8 también cumple la desigualdad, pero el 5 no lo cumple Luego la solución es:

$$(5, \infty)$$