Auxiliar 5

Funciones Reales de variable Real

Profesor: Raúl Gormaz
Auxiliar: Joaquín López

1. Resumen

- **(Conjunto imagen).**

  Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. El conjunto imagen de f es:

  $$Im(f) = f(A) = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in A, f(x) = y\}$$

- **(Ceros de una Función).** Diremos que los ceros de f son los $x \in Dom(f)$ tales que $f(x) = 0$

- **(Función Par).** Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Diremos que es par ssi $\forall x \in A, -x \in A$ y $\forall x \in A, f(-x) = f(x)$

- **(Función Impar).** Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Diremos que es Impar ssi $\forall x \in A, -x \in A$ y $\forall x \in A, f(-x) = -f(x)$

- **(Función Creciente)**

  Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $B \subseteq A$. f es creciente en B si:

  $$\forall x, y \in B, x < y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$$

- **(Función decreciente)**

  Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $B \subseteq A$. f es decreciente en B si:

  $$\forall x, y \in B, x < y \Longrightarrow f(x) \geq f(y)$$

- **(Inyectividad).** Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to B$. Con $B \subseteq \mathbb{R}$, Se dice que f es inyectiva ssi:

  $$\forall x, y \in A, x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$$

- **(Sobreyectividad).** Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to B$. Con $B \subseteq \mathbb{R}$, se dice que f es sobreyectiva ssi:

  $$\forall y \in B, \exists x \in A : y = f(x)$$

- **(Biyectividad).** una función f es biyectiva ssi es inyectiva y sobreyectiva.

- **(Función acotada).** Una función $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice acotada ssi existe un real $M > 0$ tal que cumpla

  $$\forall x \in A, |f(x)| \leq M$$

- **(Función Periódica).** $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $p > 0$ Diremos que f es periódica de periodo p si $\forall x \in A, f(x + p) = f(x)$

- **(Nota):** Cualquier función que sea estrictamente creciente (o decrec.) es inyectiva!

- **(Nota 2):** Cualquier función $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que sea inyectiva en un $A' \subseteq A$, si restringimos su Codominio a $Cod(f) = f(A')$ entonces cumple que es biyectiva!

2. Problemas

$\boxed{\textbf{P1.-}}$ Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función PAR. Demuestre que si f es creciente en $A \cap \mathbb{R}^+$; entonces f es decreciente en $A \cap \mathbb{R}^-$.

$\boxed{\textbf{P2.-}}$

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x| - \sqrt{1 - x^2}$

1. Determine $A = \mathrm{Dom}(f)$ y paridad.
2. Encuentre los ceros y signos de f.
3. Determine las zonas de crecimiento y decrecimiento.
4. Muestre que f no es inyectiva ni sobreyectiva.
5. Determine el mayor conjunto B, con $B \subseteq A = \mathrm{Dom}(f)$, tal que $f : B \to f(B)$ sea biyectiva y calcule f^{-1} para este caso.
6. Bosqueje el gráfico de f y de $|f|$

$\boxed{\textbf{P3.-}}$ Sea: $g(x) = \frac{x}{x^2 - |x|}$

(a) Determine dominio, ceros, paridad y signos de g.

(b) Encuentre asíntotas de todo tipo de g.

(c) Estudie crecimiento por intervalos de g.

(d) Encuentre el conjunto imagen de g. Bosqueje su gráfico.

(e) Estudie inyectividad de g. Encuentre al mayor intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ tal que g restringido a I sea inyectiva. Calcule su inversa explícitamente.

$\boxed{\textbf{P4.-}}$ **(Propuesto)**

Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones periódicas de periodos $p_f = 4$ y $p_g = 6$ respectivamente.

1. Suponiendo que g no tiene ceros, encuentre algún $p > 0$ de modo que la función f/g sea periódica de periodo p.
2. Suponga que las funciones f y g restringidas a $B = [0, 2]$ cumplen $f|_B\,(x) = x^2$, $g|_B\,(x) = 1 + x^2$. Pruebe que f/g es estrictamente creciente en B.
3. Suponga además que f es par. Pruebe que $(f/g)(-17) = 1/2$

$\boxed{\textbf{P5.-}}$ **(Propuesto kreizi)**

Sea la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ Pruebe que $\forall x \in \mathbb{R}, |g(x)| \leq |x|$.