P1) $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función PAR.

Dem que si f es creciente en $A \cap \mathbb{R}^+ \Rightarrow$

f es decreciente en $\boxed{A \cap \mathbb{R}^-}$

Veamos que tenemos que demostrar que:

dados $x, y \in \mathbb{R}^- \cap A$

tq $\quad x < y < 0 \Rightarrow f(y) < f(x)$

En efecto sea $x, y \in \mathbb{R}^- \cap A$ tq

$$0 > y > x \Rightarrow \boxed{0 < -y < -x}$$

luego como f es creciente y $(-y), (-x) \in A \cap \mathbb{R}^+$

$f(-y) < f(-x)$; luego como f es par!

$$\Rightarrow f(y) < f(x)$$

O sea $\boxed{x < y \Rightarrow f(y) < f(x)}$ //

P2) Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x| - \sqrt{1-x^2}$

a) determinar $A = \text{Dom } f$ y paridad

Notar que lo único que puede indeterminar a f es el término $\sqrt{1-x^2}$, o sea hay que asegurarse que $1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow 1 \geq x^2 \Rightarrow 1 \geq |x|$

$\Rightarrow 1 \geq x \geq -1 \Rightarrow x \in [-1, 1]$

Luego como $|x|$ esta def $\forall x \in \mathbb{R}$

es solo $[-1,1] \cap \mathbb{R} = [-1,1] = \text{Dom } f$

Notar que es par

Pues: $\boxed{|-x| - \sqrt{1-(-x)^2} = |x| - \sqrt{1-x^2}}$

b) los ceros de f

hay que ver cuando $|x| = \sqrt{1-x^2}$

$\Rightarrow x^2 = 1 - x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ o $x = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

Verifiquemos que sean los 0's

$$\boxed{x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{1-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \checkmark$$

$$\boxed{x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$\left|-\frac{1}{\sqrt{2}}\right| = -\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{1-\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} \checkmark$$

ahora veamos los signos!

Notar que como es par solo basta con verificar

$$x \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ y } x \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$$

$$x \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow 0 < x^2 < \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} 0 > -x^2 > -\frac{1}{2} \\ 1 > 1-x^2 > \frac{1}{2} \\ -1 < -\sqrt{1-x^2} < -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}}$$

y como $x > 0$

$$0 < |x| = x < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$-1 < |x| - \sqrt{1-x^2} < \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\boxed{f(x) < 0}$$

Para $x \in [\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \le x < 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \le x^2 < 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \ge -x^2 > -1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \ge 1 - x^2 > 0 = \frac{1}{\sqrt{2}} > \sqrt{1-x^2} > 0$$

$$1 > |x| = x \ge \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \therefore \quad \boxed{-\frac{1}{\sqrt{2}} \le -\sqrt{1-x^2} < 0}$$

$$1 > |x| - \sqrt{1-x^2} > 0 \Rightarrow \boxed{f(x) \ge 0}$$

entonces por paridad

$$x \in (-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0] \Rightarrow f(x) < 0$$

$$x \in (-1, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}] \Rightarrow f(x) > 0$$

c) Zona de crecimiento!

dado x, y $[0, 1)$ veamos que sea creciente

$$0 < x < y \Rightarrow \underline{|x| < |y|}$$

y que $0 < x < y < 1 \Rightarrow 0 < x^2 < y^2 < 1$

$$1 > \sqrt{1-x^2} > \sqrt{1-y^2} > 0 \Rightarrow -1 < \underline{-\sqrt{1-x^2} < -\sqrt{1-y^2}} < 0$$

$|x| - \sqrt{1-x^2} < |y| - \sqrt{1-y^2}$

$f(x) < f(y)$ ✓

f es creciente en $(0,1]$

y como es par, si tenemos $x, y \in (-1,0)$ tq $y > x$

$\Rightarrow -y < -x \ \wedge \ -x, -y \in (0,1]$

$\Rightarrow f(-y) < f(-x) \Leftrightarrow f(y) < f(x)$

$\therefore$ f es decrec en $[-1, 0)$

d) No es inyectiva pues

$f(-1) = f(1)$ por paridad

Pero: $\boxed{-1 \neq 1}$

No es sobre pues como

$x \in [-1,1] \Rightarrow$ $|x| \in [0,1)$, $\sqrt{1-x^2} \in (0,1]$

$|f(x)| = \left||x| - \sqrt{1-x^2}\right| \leq |x| + \sqrt{1-x^2} < 2$

y $\therefore 2 \in \mathbb{R}$ pero no existe x en $[-1,1]$ tq $\boxed{f(x) = 2}$

desigualdad Δ

c) Notemos que lo que mata la biyectividad es que sea par y el conjunto de llegada es muy grande! entonces veamos como podemos imponer la biyectividad!

1ero saquemos lo par:

tomando $B = [0,1]$ f ahí no es par!

y es creciente! $\therefore$ es inyectiva!

y claramente $f(B)$ siendo el conjunto de llegada hace que la nueva función $f|_{[0,1]}$

es sobre pues:

$\forall y \in f(B)\ \exists x \in B\ f(x) = y$

Pero dado $y \in f(B) \iff \exists x \in B$ tq $f(x) = y$ $\boxtimes$

ahora su inversa!

$$y = |x| - \sqrt{1-x^2}$$

$$y = x - \sqrt{1-x^2}$$

$$\sqrt{1-x^2} = x - y \Rightarrow 1 - x^2 = x^2 - 2yx + y^2$$

$$\Rightarrow 1 - y^2 = 2\left(x^2 - yx + \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{4}y^2\right)$$

$$1-y^2 = 2\left(x-\frac{1}{2}y\right)^2 - \frac{1}{2}y^2$$

$$1-\frac{1}{2}y^2 = 2\left(x-\frac{1}{2}y\right)^2$$

$$\boxed{\frac{1}{2}y \pm \sqrt{\frac{2-y^2}{4}} = x}$$

y ∴ hay 2 soluciones

$$x = \frac{1}{2}\left(y+\sqrt{2-y^2}\right) \quad o \quad x = \frac{1}{2}\left(y-\sqrt{2-y^2}\right)$$

Si $y=0 \rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ o $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

Para $x>0$ y ∴ Nos quedamos con $\boxed{x = \frac{y+\sqrt{2-y^2}}{2}}$

y definimos así

$$\boxed{\begin{aligned} f^{-1}: f(B) &\rightarrow B \\ x &\rightarrow f^{-1}(x) = \frac{y+\sqrt{2-y^2}}{2} \end{aligned}}$$

P3)

P2. Sea

$$g(x) = \frac{x}{x^2-|x|}$$

(a) Determine dominio, ceros, paridad y signos de g.

(b) Encuentre asíntotas de todo tipo de g.

(c) Estudie crecimiento por intervalos de g.

(d) Encuentre el conjunto imagen de g. Bosqueje su gráfico.

(e) Estudie inyectividad de g. Encuentre al mayor intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ tal que g restringido a I sea inyectiva. Calcule su inversa explícitamente.

a) para ver el dominio, es verificar que el denominador sea $\neq 0$, veamoslo!

$$\boxed{x^2 - |x| = 0}$$

Si $x=0$ entonces se tiene que $x^2-|x|=0$

luego $0 \notin \mathrm{Dom}\, f$

Si $x>0$ $\quad x^2 - x = 0 \Rightarrow x(1-x)=0$

y como $x \neq 0 \Rightarrow \boxed{1 = x}$

luego $1 \notin \mathrm{Dom}\, f$

Si $x<0$ $\quad x^2 + x = 0 \Rightarrow x(1+x)=0$

y como $x\neq 0 \Rightarrow \boxed{x=-1}$

luego $-1 \notin \mathrm{Dom}\, f$ y $\therefore$ $\boxed{\mathrm{Dom}\, f = \mathbb{R} \setminus \{-1,0,1\}}$

ahora veamos los ceros

Para que $f(x)=0 \Rightarrow \dfrac{x}{x^2-|x|}=0 \Rightarrow x=0$

Pero $0 \notin \mathrm{Dom}\, f$ $\therefore$ f no tiene ceros!

ahora veamos la paridad

$$f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2-|-x|} = -\left(\frac{x}{x^2-|x|}\right) = -f(x)$$

f es impar!

Veamos los signos

$$f(x)>0 \iff \frac{x}{x^2-|x|}>0$$

Si $x>0$

$$\frac{x}{x^2-x}>0 \iff \frac{1}{x-1}>0$$

y Notar que cuando $x>1$ se cumple! y como

$$x\in(1,\infty)\subseteq(0,\infty) \Rightarrow f(x)>0 \quad x\in(1,\infty)$$

ahora si $x<0$

$$\frac{x}{x^2+x}>0 \iff \frac{1}{x+1}>0 \Rightarrow x\in(-1,\infty)\cap(0,\infty)$$

$$x\in(-1,0)$$

O sea $f(x)>0$ en $(-1,0)\cup(1,\infty)$

Para $f(x)<0 \iff \frac{x}{x^2-|x|}<0$ mismo procedimiento!

Si $x>0$

$$\frac{x}{x^2-x}<0 \iff \frac{1}{x-1}<0 \Rightarrow x\in(-\infty,1)$$
$$\cap(0,\infty)$$

$\Rightarrow x \in (0,1)$, $f(x) < 0$

Si $x<0$

$$\frac{x}{x^2+x} < 0 \iff \frac{1}{1+x} < 0 \Rightarrow x \in (-\infty,-1) \subseteq (-\infty,0)$$

$\Rightarrow x \in (-\infty, 1)$ $f(x) < 0$ y $\therefore$ juntando todo $f(x)<0$ $\forall x \in (-\infty,-1) \cup (0,1)$

Osea Basicamente

	$-\infty$	-1	0	1	∞
f	$-$	$+$		$-$	$+$

b) ahora toca definir que es una asintota de manera coloquial es cuando el denominador o otra cosa, hace que la función explote! (asintota Vert/) o se vaya a 0 (asintota Hor.)

Notar que cuando x esta cerca de $\{-1,1\}$ la funcion explota! y $\therefore$ las asintotas se ubican en $\boxed{-1,1}$

y si tomamos x muy grande f tiende a 0 pues

Por ej $\left|f(1000)\right| = \dfrac{1000}{1000^2 - 1000} \approx 0$

y por lo tanto tiene a 0 como asíntota horizontal

y pq no explota en 0?

es pq en 0 hay una discontinuidad!

o sea si tomamos los $x<0$ y $x>0$

$f(x)=\frac{1}{x+1}$, $f(x)=\frac{1}{x-1}$

y cerca de 0 $f(x)\simeq 1$ y $f(x)\simeq -1$

pero es un detalle nomas!

c) para el crecimiento basta ver en el los intervalos $(0,1)\cup(1,\infty)$ pues como es impar si es creciente en alguno de esos (resp decrec) será creciente en el intervalo simetrico, veamos eso rapidamente

$\boxed{\begin{array}{l}\text{si } A\cap\mathbb{R}^+ \text{ es crec} \Rightarrow A\cap\mathbb{R}^- \text{ es crec!! dado } x,y \text{ tq} \\ x<y<0 \Rightarrow 0<-y<-x \Rightarrow f(-y)<f(-x) \\ -f(x)>-f(y) \Rightarrow f(y)>f(x)!\end{array}}$

dicho esto

$0 < x < y < 1 \Rightarrow f(x) = \dfrac{x}{x^2 - x}$, $f(y) = \dfrac{y}{y^2 - y}$; $x, y \neq 0$

$\Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{x-1}$, $f(y) = \dfrac{1}{y-1}$

$$\left.\begin{array}{l} x < y \\ x-1 < y-1 \\ \dfrac{1}{x-1} > \dfrac{1}{y-1} \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) > f(y)$$

$\therefore$ f es decrec en $(0,1)$

Para $x \in (1,\infty) \Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ $f(y) = \dfrac{1}{y-1}$

es lo mismo que antes!

$x < y \Rightarrow x-1 < y-1 \Rightarrow \dfrac{1}{x-1} > \dfrac{1}{y-1}$

es decrec en $(1,\infty)$

y $\therefore$ por lo anterior tenemos $A = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$

$A \cap \mathbb{R}^+ = (0,1) \cup (1,\infty)$ es decreciente y $\therefore$

$A \cap \mathbb{R}^- = (-\infty,-1) \cup (-1,0)$ también es decreciente!

d) el conjunto imagen!

Veamos si $x \in (1,\infty)$ $\quad 0 < x-1 \Rightarrow 0 < \dfrac{1}{x-1}$

$\Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{x-1} \in (0,\infty)$

Si $x \in (0,1)$ $\quad 0 < x < 1$

$-1 < x-1 < 0$

$\Rightarrow -1 > \frac{1}{x-1} \Rightarrow \boxed{-1 > f(x)}$ $\boxed{f(x) \in (-\infty, -1)}$

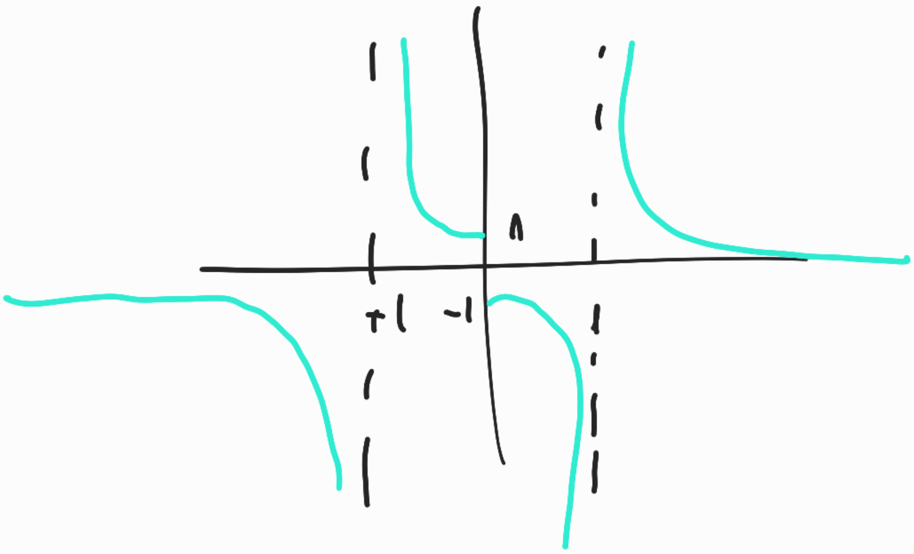
entonces por paridad

en $x \in (-1, 0) \Rightarrow \boxed{f(x) \in (1, \infty)}$

$x \in (-\infty, -1) \Rightarrow \boxed{f(x) \in (-\infty, 0)}$

y el conj imagen es la unión! ∴

$\mathrm{Im}(A) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$



e) podemos proponer un conjunto maximal! donde sea inyectiva! sería $A = (0,1) \cup (1, \infty)$ y ∴ cod $= \mathbb{R} \setminus (-1, 0)$

$f(x) = \frac{1}{x-1} \Rightarrow \boxed{f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x}}$

Como nos piden un intervalo igual podemos tomar $(1, \infty)$ y $\therefore$ Cod $= \mathbb{R}_+^*$

y tendría la misma inversa !!!