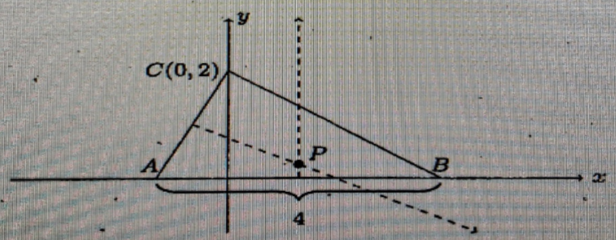
PI. (6.0 ptos) Un triángulo ABC variable tiene su vértice $C(0,2)$, fijo sobre el eje OY y el lado opuesto AB, de longitud dada $\overline{AB}=4$, se desliza sobre el eje OX. Las rectas simetrales de los lados AB y AC se cortan en un un punto $P(\alpha,\beta)$. (Ver esquema)

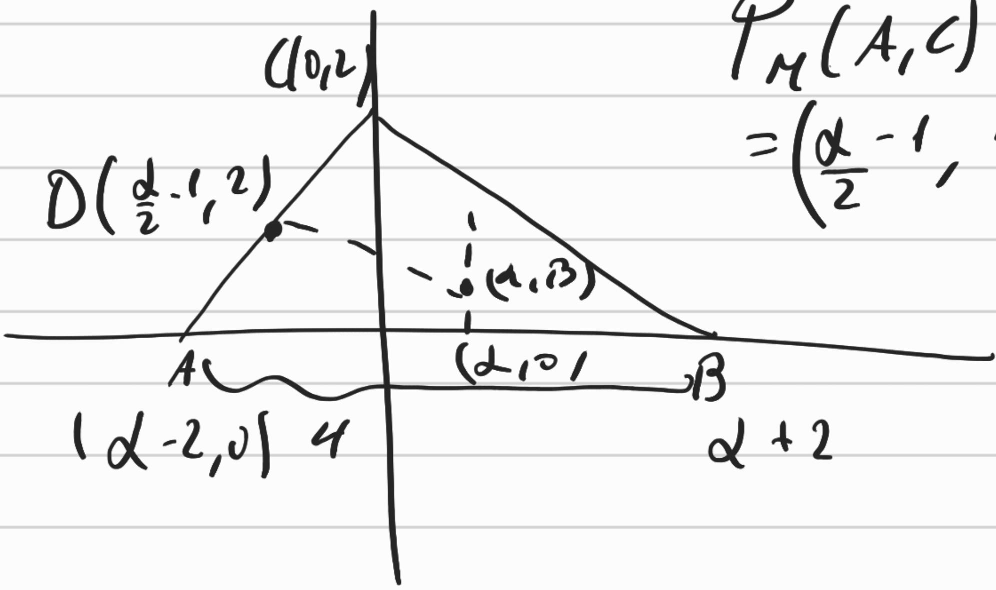
Se pide determinar el Lugar Geométrico que describe el punto P, en función de α y β, e identificar el Lugar Geométrico indicando sus elementos principales (focos, directrices, excentricidad).

Indicación: Si $x_P=\alpha$, entonces $x_A=\alpha-2$ y $x_B=\alpha+2$.



$P_M(A,C)$ (Punto Medio!)

$= \left(\frac{\alpha}{2}-1,\ 1\right)$



Encontremos las pendientes de las rectas AC y DP

$$\boxed{m_{AC} = \frac{2}{2-\alpha}} \qquad \boxed{m_{DP} = \frac{\alpha-2}{2}}$$

Luego definamos la recta: (con el punto medio $P_M(A,C)$)

$$L_{DP}:\ y-1 = \frac{\alpha-2}{2}\left(x-\left(\frac{\alpha}{2}-1\right)\right)$$

Luego el lugar geométrico que queremos encontrar es cuando intersecta la vertical $x=\alpha$ $\therefore$

$$\beta-1 = \frac{\alpha-2}{2}\left(\alpha-\left(\frac{\alpha}{2}-1\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow \beta-1 = \frac{(\alpha-2)}{2}\,\frac{(\alpha+2)}{2}$$

$\Rightarrow \boxed{4B = d^2}$ donde $4P = 4 \Rightarrow \boxed{P = 1}$

y $\boxed{\text{el Foco es: } (0,1)}$ y la Directriz $\boxed{D: y = -1}$

P1. Identifique las siguientes cónicas:

(a) $x^2 + 2x + y^2 + 4y - 4 = 0$ circ

(b) $2y^2 + 4x - y + 3 = 0$ parabola

(c) $x^2 - 3x - 2y^2 - 5y = 0$ Hiperbola

(d) $2x^2 + 2x + 3y^2 + 4y - 4 = 0$ elipse

(e) $-2x - 3x^2 + 5y + 1 = 0$ Parabola

(f) $x^2 - y^2 = 0$ Propuesto!

es simplemente completar $(\ )^2$!

a) $x^2 + 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 - 2 - 4 - 4 = 0$

$$(x+1)^2 + (y+2)^2 = 10$$

es una circunferencia! de Centro $(-1,-2)$ y radio $\sqrt{10}$

b) $y^2 - \frac{y}{2} + 4x + 3 + \frac{1}{16} - \frac{1}{16} = 0$

$$\left(y - \frac{1}{4}\right)^2 + 2x + \frac{24}{16} - \frac{1}{16} = 0$$

$$-\frac{1}{2}\left(y - \frac{1}{4}\right)^2 = \left(\frac{23}{32} + x\right)$$

es una parabola! de vertice $\left(-\frac{23}{32}, \frac{1}{4}\right)$

$P = -\frac{1}{2}$ $\quad F\left(-\frac{23}{32}, -\frac{1}{4}\right)$

$D: y = -\frac{1}{2}$

c) $\left(x^2-3x+\frac{9}{4}\right)-2\left(y^2+\frac{5}{2}y+\frac{25}{16}-\frac{25}{16}\right)-\frac{9}{4}$

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-2\left(y+\frac{5}{4}\right)^2+\frac{25}{8}-\frac{18}{8}=0$$

$$\left(x-\tfrac{3}{2}\right)^2-2\left(y+\tfrac{5}{4}\right)^2=-\frac{7}{8}$$

$$\frac{\left(y+\tfrac{5}{4}\right)^2}{\tfrac{7}{16}}-\frac{\left(x-\tfrac{3}{2}\right)^2}{\tfrac{7}{8}}=1$$

es una hiperbola! donde $\begin{cases} b^2=\frac{7}{16} \\ a^2=\frac{7}{8} \end{cases}$

d) $2\left(x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)+3\left(y^2+\frac{4}{3}y+\frac{16}{36}-\frac{16}{36}\right)-4=0$

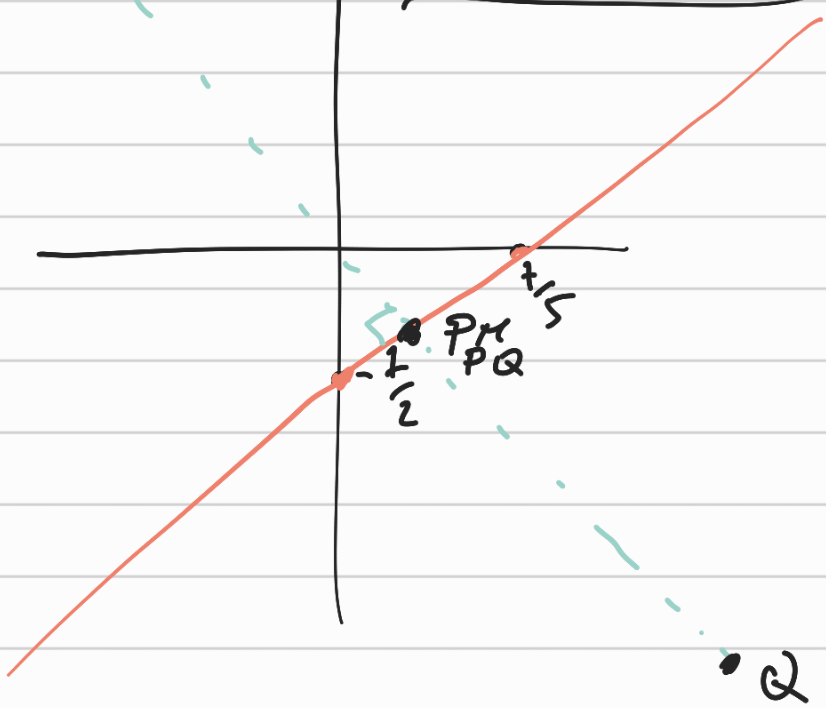
$$2\left(x+\frac{1}{2}\right)+3\left(y+\frac{4}{6}\right)^2-\frac{1}{2}-\frac{3\cdot 16}{36}-4=0$$

es una elipse! la idea del ejercicio es familiarizar con completar $(\ )^2$.

P3

$P(-2,6)$

$L: \frac{5}{2}x - \frac{7}{2} = y$



tenemos un punto y la pendiente:

$m_{PQ} = -\frac{2}{5}$ entonces $Q \in L_{PQ}$

y $D(P,L) = D(Q,L)$

Veamos que $L_{PQ}: y = -\frac{2}{5}(x+2)+6$

$$y - 6 = -\frac{2}{5}(x+2)$$

$$y = -\frac{2}{5}x - \frac{4}{5} + 6 = -\frac{2}{5}x + \frac{26}{5}$$

$$-\frac{2}{5}x + \frac{26}{5} = \frac{5}{2}x - \frac{7}{2} \quad / \cdot 10$$

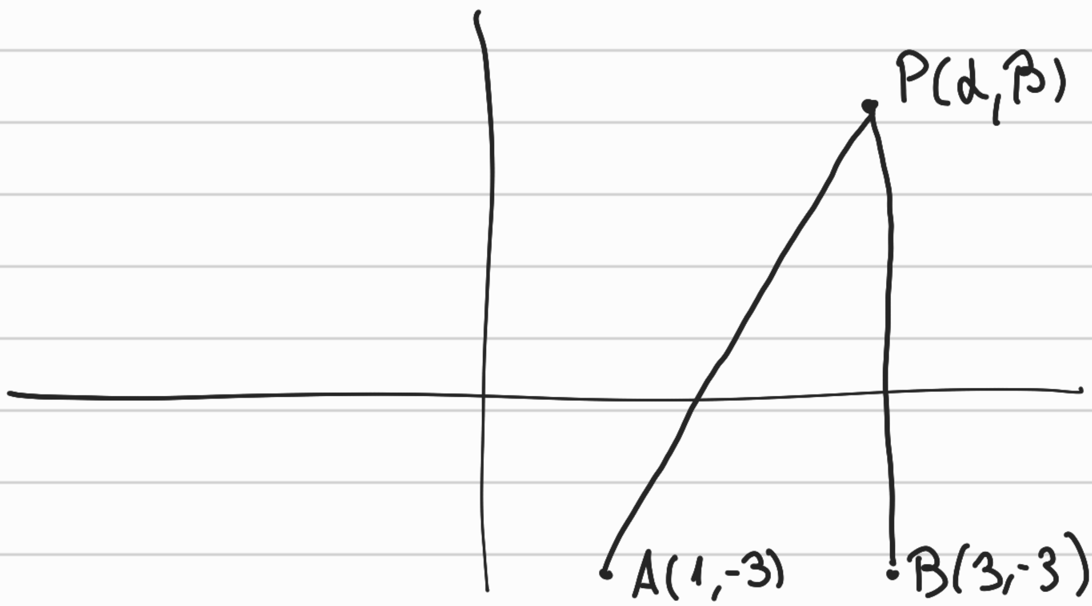
$$-4x + 52 = 25x - 35$$

$$87 = 29x \Rightarrow \boxed{x = 3}$$

$$\boxed{y = 4} \quad P_M = (3,4) \Rightarrow 2P_M - P = Q$$

$$Q = (6+2,\ 8-6) = \boxed{(8,\ 2)}$$

P4



aprovechemos la condición que $m_{AP} \cdot m_{BP} = 4$ y obtengamos cada pendiente

$$m_{AP} = \frac{\beta+3}{\alpha-1} \qquad m_{PB} = \frac{\beta+3}{\alpha-3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{(\beta+3)^2}{(\alpha-1)(\alpha-3)} = 4} \text{ ; multiplicando las pendientes}$$

$$(\beta+3)^2 = 4(\alpha^2 - 4\alpha + 4 - 1)$$

$$(\beta+3)^2 = 4(\alpha-2)^2 - 4$$

$$\Rightarrow \quad 4 = 4(\alpha-2)^2 - (\beta+3)^2$$

$$1 = \frac{(\alpha-2)^2}{1} - \frac{(\beta+3)^2}{4}$$

es una hipérbola de centro $(2,-3)$, $a^2=1$, $b^2=4$