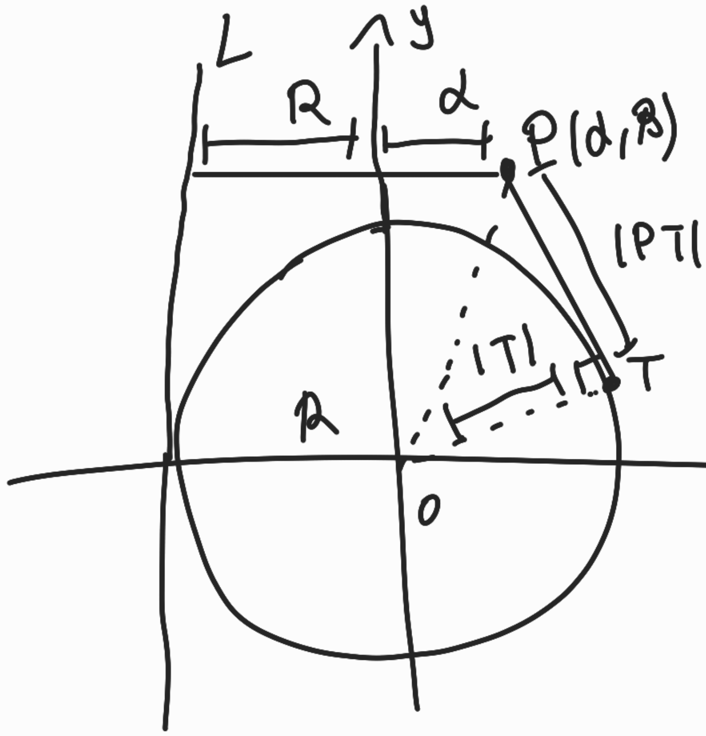
P2)



$d(P,L) = 2d(P,T)$

Bueno si $P(\alpha,\beta)$ que forma tiene $T(x_t, y_t)$??

Notar que cumple dos cosas (pitágoras!)

$$|T|^2 + |PT|^2 = |P|^2$$

$$x_t^2 + y_t^2 + \cancel{\alpha^2} - 2x_t\alpha + x_t^2 + \cancel{\beta^2} - 2y_t\beta + y_t^2 = \cancel{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$2(x_t^2 + y_t^2 - x_t\alpha - y_t\beta) = 0$$

$$\boxed{x_t^2 + y_t^2 = x_t\alpha + y_t\beta \cancel{= 0}}$$

Pero $T(x_t, y_t) \in C \Rightarrow x_t^2 + y_t^2 = R^2$

$$\boxed{R^2 = x_t\alpha + y_t\beta}$$

Con esto tenemos algo con que trabajar pues

$$d(P,L) = |\alpha + R|$$

$$d(P,T) = |PT| = \sqrt{(\alpha - x_t)^2 + (\beta - y_t)^2}$$

$$= \sqrt{\alpha^2 - 2x_t\alpha + x_t^2 + \beta^2 - 2\beta y_t + y_t^2}$$

$$= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 2\underbrace{(x_t\alpha + \beta y_t)}_{R^2} + \underbrace{x_t^2 + y_t^2}_{R^2}}$$

$$= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - R^2}$$

Luego imponiendo $2d(P,T) = d(P,L)$

$$2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - R^2} = |\alpha + R|$$

$()^2$

$$4(\alpha^2 + \beta^2 - R^2) = \alpha^2 + 2\alpha R + R^2$$

$$4\alpha^2 + 4\beta^2 - 4R^2 = \alpha^2 + 2\alpha R + R^2$$

$$4\beta^2 + 3\alpha^2 - 2\alpha R = 5R^2$$

$$\Rightarrow 4\beta^2 + 3\left(\alpha^2 - \frac{2}{3}R\alpha + \frac{1}{9}R^2 - \frac{1}{9}R^2\right) = 5R^2$$

$$4\beta^2 + 3\left(\alpha - \frac{1}{3}R\right)^2 = \frac{16R^2}{3} \quad \Big/ \cdot \frac{3}{16R^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\left(\alpha - \frac{R}{3}\right)^2}{\frac{16}{9}R^2} + \frac{\beta^2}{\frac{4}{3}R^2} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\left(\alpha - \frac{R}{3}\right)^2}{\left(\frac{4}{3}R\right)^2} + \frac{\beta^2}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}R\right)^2} = 1}$$

es una elipse!

de centro $\left(\frac{R}{3}, 0\right)$; excentricidad $= \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$

$$= \frac{\sqrt{\frac{16}{9}R^2 - \frac{12}{9}R^2}}{\frac{4}{3}R} = \frac{\frac{2}{3}R}{\frac{4}{3}R} = \frac{1}{2}$$

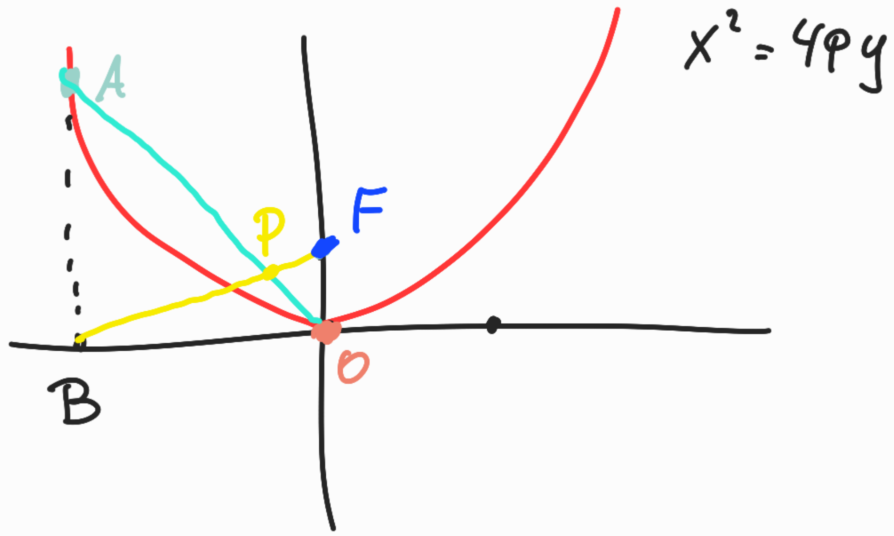
Focos $\left(\frac{R}{3} \pm a \cdot e\right) = \left(\frac{R}{3} \pm \frac{4}{3}R \cdot \frac{1}{2}, 0\right) = \left(\frac{R}{3} \pm \frac{2R}{3}, 0\right)$

$F_1 = (R, 0) \quad F_2 = \left(-\frac{R}{3}, 0\right)$

D_1: $x = \frac{R}{3} + \frac{a}{e} = \frac{R}{3} + \frac{8}{3}R = 3R$

D_2: $x = \frac{R}{3} - \frac{a}{e} = \frac{R}{3} - \frac{8}{3}R = -\frac{7}{3}R$

P3)



Una condición es

$A \in L_{PO}$ ¿y como es la recta L_{PO}?

$m_{PO} = \frac{\beta}{\alpha} \Rightarrow L_{PO}: y = \frac{\beta}{\alpha}x$

y como $A \in$ parabolA $\Rightarrow \boxed{y_a = \frac{1}{4p}x_a^2}$

$\Rightarrow L_{PO} \cap$ parabolA $= \{A\} \Rightarrow \boxed{\frac{x_a^2}{4p} = \frac{\beta}{\alpha}x_a}$

Si $x_a \neq 0 \Rightarrow \boxed{x_a = \frac{4p\beta}{\alpha}}$

$x_a = 0$ es una solución que NO! nos interesa!

ahora veamos B

$B \in L_{PF}$ ¿y como es L_{PF}?

$$m_{PF} = \frac{\beta - p}{\alpha - 0} = \frac{\beta - p}{\alpha}$$

y por punto pendiente (con punto $F(0,p)$)

$$L_{PF}: y - p = \frac{\beta - p}{\alpha} x$$

y notar que cuando $L_{PF} \cap OX = \{B\}$

$$y_B = 0 \Rightarrow -p = \frac{\beta - p}{\alpha} x_B$$

$$\boxed{x_B = \frac{p\alpha}{p - \beta}}$$

y ahora imponemos que A y B tienen la misma absisa

$$\boxed{x_B = x_A} \Rightarrow \frac{p\alpha}{p - \beta} = \frac{4p\beta}{\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad p\alpha^2 = 4p^2\beta - 4p\beta^2$$

$$\Rightarrow P\alpha^2 + 4P\left(\beta^2 - P\beta + \frac{1}{4}P^2 - \frac{1}{4}P^2\right) = 0$$

$$P\alpha^2 + 4P\left(\beta - \frac{P}{2}\right)^2 = P^3 \quad \Big/ \cdot \frac{1}{P^3}$$

$$\boxed{\frac{\alpha^2}{P^2} + \frac{\left(\beta - \frac{P}{2}\right)^2}{\left(\frac{P}{2}\right)^2} = 1}$$

es una elipse! de centro $\left(0, \frac{P}{2}\right)$

excentricidad $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{\sqrt{P^2 - \frac{P^2}{4}}}{P} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Focos $\left(\pm P\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{P}{2}\right)$

Directrices : $x = \pm P\frac{\sqrt{3}}{2}$

P4 $\quad \frac{|x|}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

1) Notar que la función solo está definida cuando

$a^2 - x^2 > 0 \Rightarrow a^2 \geq x^2 \Rightarrow a \geq |x| \Rightarrow \boxed{a \geq x \geq -a}$

ojo (denominador $\neq 0$)

luego el dominio es $\mathrm{Dom}\, f = (-a, a)$

ahora Notar que para cualquier $y \in \mathbb{R}_+$
puedo encontrar un x tq $f(x)=y$, en efecto

$$y = \frac{|x|}{\sqrt{a^2-x^2}} \Rightarrow y^2 = \frac{x^2}{a^2-x^2} \Rightarrow \frac{a^2-x^2}{x^2} = \frac{1}{y^2}$$

$$\frac{a^2}{x^2} = \frac{y^2+1}{y^2} \Rightarrow x^2 = \frac{(y\,a)^2}{y^2+1} \Rightarrow \boxed{x = \frac{y\,a}{\sqrt{y^2+1}}}$$

Tomando ese x cumple que $f(x)=y$, Bueno pero que
demostramos? ? que para cualquier positivo
hay un elemento del dominio tq $f(x)=y$
y Notar que 0 tambien cumple $\therefore$

$$\mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$$

Otra forma es que $\sqrt{a^2-x^2}$ No esta acotado cuando $x \approx a$
$x \approx -a$

b) los ceros de f, imponemos $f(x)=0 \Rightarrow |x|=0$
$\Rightarrow x=0$ ✓✓ ceros $=\{0\}$

es par, pues $f(-x)=f(x)$ $\boxed{\text{chequeando!}}$

$f(\frac{a}{2}) = f(-\frac{a}{2})$
Notar que no es inyectiva pues
y $\frac{a}{2} \neq -\frac{a}{2}$ y tampoco es sobreyectiva pues
$\forall x \in A$ $f(x) \geq 0$ y $\therefore$ No existe
$\boxed{x \text{ tq } f(x) = -1}$

Ahora para la asintotas Basta con ver que en $x=a$ o en $x=-a$ se anula el denominador y no en el numerador (Ver def PAG 92) $\therefore$ son asintotas verticales!
y No tiene asintotas horizontales pq el dominio esta acotado.

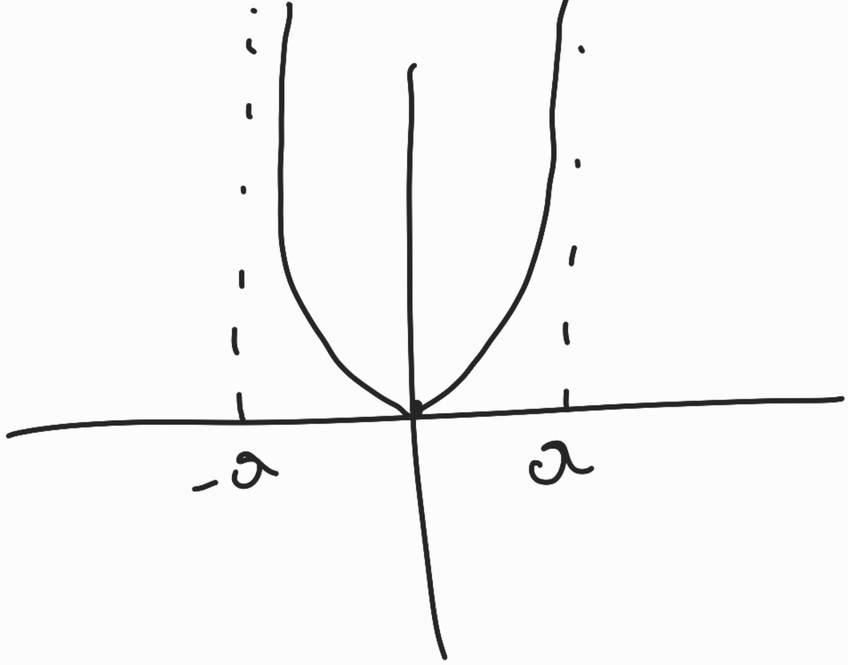
3) Veamos que es (est) creciente en $(-a,a)\cap[0,\infty)$
$=[0,a)$

dados $x,y\in[0,a)$ tq $x<y$ como $x\geq 0$ e $y>0$
$|x|<|y|$, luego formemos la función para

$$0\leq x<y<a \Rightarrow 0\leq x^2<y^2<a^2$$
$$\Rightarrow 0\geq -x^2>-y^2>-a^2 \quad /\cdot(-1)$$
$$\Rightarrow a^2\geq a^2-x^2>a^2-y^2>0 \quad /+(a^2)$$
$$\Rightarrow a\geq\sqrt{a^2-x^2}>\sqrt{a^2-y^2}>0$$
$$\Rightarrow 0<\boxed{\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}<\frac{1}{\sqrt{a^2-y^2}}}$$

y $\therefore$
$$\frac{|x|}{\sqrt{a^2-x^2}}<\frac{|y|}{\sqrt{a^2-y^2}}$$
$$f(x)<f(y)$$
luego f es est creciente en $[0,a)$

d]



$\frac{\pi}{2} = ka$

<u>Para el futuro</u>: esta es la funcion $\left|tg\left(\frac{\pi}{2a}\theta\right)\right|$

Con $\theta \in [-a, a]$

$\forall x \in \mathbb{R}$