Auxiliar 8

Ax. del supremo y Sucesiones

Profesor: Raúl Gormaz
Auxiliar: Joaquín López

1. Problemas

P0.- (Ax. supremo)
Identifique si los siguientes conjuntos tienen ínfimo, supremo, mínimo y máximo, y enúncielos.

1. $[0,1]$
2. $(0,1]$
3. $[-1,\infty)$
4. $\{0\} \cup (0,1] \cup \{\pi\} \cup (4,\infty)$
5. $\{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$

Solución:

1. Tiene supremo y ínfimo $\sup\{[0,1]\} = 1$ y $\inf\{[0,1]\} = 1$ y como $0, 1 \in [0,1]$, entonces también son mínimos y máximos
2. Igual que el anterior, solo que como $1 \notin [0,1]$ no tiene mínimo
3. Como no es acotado superiormente no tiene máximo y por lo tanto tampoco tiene supremo, y notar que $\inf\{[-1,\infty)\} = -1$ y como $-1 \in [-1,\infty)$, es mínimo.
4. 0 es el mínimo y por lo tanto ínfimo y como no es acotado superiormente no tiene ni máximo ni supremo.
5. Notar que esto es el conjunto $\{0, 1, 4, 9, 16 \dots\}$ y como no es acotado superiormente, entonces no tiene ni máximo ni supremo, y 0 es cota inferior y pertenece al conjunto, por lo tanto es mínimo y también ínfimo.

P1.- (Ax. Supremo)

1. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ conjuntos no vacíos tales que

$$\forall x \in A, \exists y \in B, x \leq y$$

Demuestre que si B es acotado superiormente, entonces A también lo es y $\sup(A) \leq \sup(B)$

2. Demuestre que $\sup\{1-x|x\in(0,1)\}=1$, Justificando sus pasos.

3. Demuestre que

$$\inf\{\frac{1}{2n+1}:n\in\mathbb{N}\}=0$$

Solución:

1. Demostremos que A es acotado superiormente, pero antes notemos que, Como $B\neq\emptyset$ y es acotado superiormente, por **Ax. supremo** existe $\sup(B)$ o sea,

$$\forall y'\in B, y'\leq\sup(B)$$

(Es cota superior).

Dicho esto empecemos la demostración, Sea $x\in A$ por propiedad sabemos que existe $y\in B$ tal que $x\leq y$, pero por lo dicho anteriormente, tenemos que $x\leq y\leq\sup(B)$ y por lo tanto tenemos que $\forall x\in A, x\leq\sup(B)$ o dicho de otra forma $\sup(B)$ es cota superior de A por lo tanto A es acotado superiormente.

Luego como por dato $A\neq\emptyset$ por **Ax. supremo** existe $\sup(A)$ y como es supremo (la menor de las cotas superiores) cumple que $\sup(A)\leq\sup(B)$.

$\square$

2. Como el conjunto esta completamente definido por $(0,1)$ podemos tomarnos un elemento cualquiera de ese conjunto. por conveniencia definiremos $\{1-x|x\in(0,1)\}=C$

Sea $x\in(0,1)\iff 0<x<1$, entonces podemos aplicar menos y luego sumar 1 para obtener que $0<1-x<1$ y esto es $\forall x\in(0,1)$ luego tenemos que C es acotado superiormente por 1 y claramente no es vacío (Propuesto).

Así nos aseguramos que este supremo existe, ahora procedemos a demostrar que sea $=1$, primero que todo definiremos $\sup(C)=s_c$ para calmar la notación. Ahora hay dos formas de hacer esto, vía tricotomía, o caracterización del supremo.

Empecemos por tricotomía, como sabemos que s_c existe y es un real, una y solo una de las tres proposiciones siguientes se cumple, $s_c=1$ o $s_c<1$ o $s_c>1$. Entonces veamos que se descarten las desigualdades

- Si $s_c>1$:
  Entonces seria contradicción rápido, puesto que s_c es la menor de las cotas superiores.
- Si $s_c<1$:
  Entonces construyamos un real que este entre s_c y 1, en efecto, si tomamos el promedio $\frac{s_c+1}{2}=\alpha$ este sigue en $(0,1)$ y por lo tanto podemos imponer que $\alpha=1-x'$ para algún $x'\in(0,1)$y obtenemos que tomando $x'=1-\alpha$ cumple que $s_c<1-x'<1$, pero esto no puede ser ya que s_c es una cota superior, y encontramos un elemento del conjunto que es mayor a s_c, contradicción!

Luego por tricotomía solo queda que $s_c=1$.

$\square$

Lo otro es usar la caracterización del supremo, que dice lo siguiente:

Dado $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacio y acotado superiormente, $s = \sup(A)$ si y solo si, s es cota superior y

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, s - \varepsilon \leq x$$

Como queremos demostrar que $s = 1$ es el supremo y ya sabemos que es cota superior, basta con ver que se cumple la caracterización!

En efecto, sea $\varepsilon > 0$, notemos que queremos encontrar $x \in (0, 1)$ tal que

$$1 - \varepsilon \leq 1 - x$$

o sea que, basta con encontrar $x \in (0, 1)$ que verifique que

$$x \leq \varepsilon$$

notar que: si $\varepsilon \geq 1$ cualquier $x' \in (0, 1)$ verifica y estamos listos.

Ahora si $0 < \varepsilon < 1$ basta con tomar $x'' = \varepsilon/2$ y estamos listos, tomando $x = \min\{x', x''\}$ se cumple la propiedad. Luego se tiene $s = 1$ es supremo.

$\square$

Nota: Es mucho mas constructiva la segunda demostración, pues proponemos un valor de x y llegamos al resultado, en cambio la primera tiene mucha contradicción.

3. Al igual que antes, llamaremos a $\{\frac{1}{2n+1} : n \in \mathbb{N}\} = C$, claramente 0 es una cota inferior y $C \neq \emptyset$ (Propuesto).

   Por lo tanto sabemos que existe el ínfimo, basta ahora con verificar que sea $= 0$. De la misma manera que el anterior, podemos proceder por tricotomía o por caracterización del ínfimo vía propiedad arquimediana.(se hará en clases!).

   Por tricotomía, Queremos demostrar que $\inf(C) = i_c = 0$ entonces hay que descartar que $i_c < 0$ y $i_c > 0$

   - Si $i_c < 0$
     Contradicción con ser ínfimo.
   - Si $i_c > 0$
     Entonces notemos que
     $$\forall n \in \mathbb{N}, i_c \leq \frac{1}{2n+1}$$
     (cota inferior!) luego, esto implica que
     $$n \leq \frac{1 - i_c}{2i_c}$$
     para todo $n \in \mathbb{N}$, o sea que $\frac{1-i_c}{2i_c}$ es cota superior de los Naturales! pero sabemos que eso es falso, contradicción.

   Luego por tricotomía $i_c = 0$.

   $\square$

   Ahora veamos por la caracterización del ínfimo, notar que tiene una definición 'análoga' al supremo:

Dado $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacio y acotado inferiormente, $i = \inf(A)$ si y solo si, i es cota inferior y

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, x \leq i + \varepsilon$$

Entonces para demostrar que $s = 0$ es ínfimo, ya sabemos que es cota inferior, solo hay que ver la caracterización!

O sea demostrar que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2n+1} \leq 0 + \epsilon$$

(Nota: esto se parece mucho a probar que la sucesión $\frac{1}{2n+1}$ converge a 0, veremos esto después con el teorema de sucesiones monótonas acotadas).

O sea que, dado $\varepsilon > 0$ hay que encontrar un $n \in \mathbb{N}$ tal que cumpla la caracterización! y notar que por propiedad arquimediana sabemos que $\forall \gamma > 0, \exists n' \in \mathbb{N}, 1 < n'\gamma$.

Por lo tanto, se cumple en particular que, para ε existe n' tal que $n'\varepsilon > 1$ y como $2n' + 1 > n'$ en particular se tiene que $(2n'+1)\varepsilon > 1$, osea que tomando $n = n'$ la caracterización se cumple!

Luego 0 es el ínfimo del conjunto.

$\square$

P2.- (Limites) Demuestre los siguientes limites por definición

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+1} = 0$
2. $\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{n}} = 0$
3. $\lim_{n\to\infty} \frac{2n-5}{2n-7} = 1$
4. $\lim_{n\to\infty} cos(n!\pi x) = 1,$ para $x \in \mathbb{Q}$ (Propuesto!)

Solución:

1. Procedamos por definición!, recordemos que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+1} = 0$ es equivalente a:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \left| \frac{1}{n^2+1} - 0 \right| \leq \varepsilon$$

   Entonces la meta de la demostración es que, dado $\varepsilon > 0$, encontremos n_0 tal que a partir de este cumpla que,

$$\left| \frac{1}{n^2+1} \right| \leq \varepsilon$$

   Para todo $n \geq n_0$.

   Busquemos ese n_0 entonces! Trabajemos la desigualdad

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n^2+1} \right| &= \frac{1}{n^2+1} \\ &\leq \frac{1}{n^2} \leq \varepsilon \end{aligned}$$

Ahora podemos trabajar con una expresión mas sencilla debido a que relajamos el problema y Notemos que si imponemos que sea menor que ε entonces podemos despejarlo, quedando que:

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \leq n$$

Por lo tanto tomando $n_0 = \lfloor \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \rfloor + 1$ cumple que

$$n \geq n_0 \implies \lfloor \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \rfloor + 1 \leq n$$

Osea

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \leq n$$

y por lo tanto cumple la propiedad!

$\square$

Otra forma es notando que, como se tiene la propiedad arquimediana

$$\forall r > 0, \exists n' \in \mathbb{N}, rn' > 1$$

en particular se cumple para este épsilon que nos dimos, y por lo tanto existe n' tal que $\varepsilon n' > 1$ y como $n'^2 + 1 > n'$ implica que $(n'^2 + 1)\varepsilon > n'\varepsilon > 1$ y por lo tanto, tomando $n_0 = n'$ se tiene para todo $n > n_0$ que $\frac{1}{n^2+1} \leq \varepsilon$. $\square$

2. Análogo al anterior usando la definición (Propuesto), Queremos buscar un n_0 tal que si $n \geq n_0$, entonces $\sqrt{\frac{1}{n}} \leq \varepsilon$.

   Basta ver que

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \leq n$$

   y por lo tanto tomando $n_0 = \lfloor \frac{1}{\varepsilon^2} \rfloor + 1$ se cumple la propiedad.

   $\square$

3. En este caso de la definición queda que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{2n-5}{2n-7} - 1\right| &= \left|\frac{2}{2n-7}\right| \\
&= \frac{2}{|2n-7|} \\
&= \frac{2}{2n-7} && \textbf{(Para n suficientemente grande)} \\
&= \frac{1}{n-7/2} \leq \varepsilon \\
&= 1 \leq \varepsilon(n-7/2)
\end{aligned}$$

   Luego notemos que hay que encontrar un n_0 tal que cumpla que eso, y por la propiedad arquimediana sabemos que, para $\varepsilon > 0$ existe n' tal que $\varepsilon n' > 1$ y tomando $n_0 = n' + 4$ entonces se cumple la propiedad! puesto que $n_0 - 7/2 = n' + 1/2 > n'$ y para $n \geq n_0$,

$$(n - 7/2)\varepsilon \geq (n_0 - 7/2)\varepsilon > 1$$

$\square$

P3.- (Ax. Supremo)

1. Sea f una función creciente cuyo dominio es el intervalo $[0,1]$. Demuestre que el conjunto $f([0,1])$ es acotado superiormente. Calcule el supremo del conjunto $f([0,1])$ y determine si posee un máximo.

2. Dados $A, B \subseteq \mathbb{R}_+^*$ no vacíos y acotados, Se define el conjunto $P = \{xy : x \in A, y \in B\}$. Demuestre que $\sup(P) = \sup(A) \cdot \sup(B)$ (Propuesto!)

Solución:

Notemos que el conjunto es

$$f([0,1]) = \{f(x) | x \in [0,1]\}$$

Entonces basta con ver como se comporta la función en $[0,1]$. Sea $x \in [0,1] \iff 0 \leq x \leq 1$ y como f es una función creciente, preserva las desigualdades, por lo tanto, $f(0) \leq f(x) \leq f(!)$ y esto es para cualquier $x \in [0,1]$, por lo tanto $f(1)$ es cota superior de $f([0,1])$.

Ahora, claramente $f([0,1]) \neq \emptyset$ ya que $f(1) \in f([0,1])$, ahora sabemos que existe el supremo, pero notemos que $f(1)$ es cota superior y $f(1)$ esta en el conjunto!, por lo tanto debe de ser el máximo (si no lo fuese, no seria cota superior o no estaría en el conjunto y eso no puede ser). Luego $f(1)$ es el máximo y por lo tanto, también supremo!

$\square$

P4.- (Limites)

1. Demuestre, Usando la definición de convergencia que, dado $a > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{2 - \frac{a}{n}} = \sqrt{2}$$

2. Usando lo anterior y álgebra de limites calcule para $a > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt{2 - \frac{a}{n}} - \sqrt{2})$$

Solución:

1. Hay que probar que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \left|\sqrt{2 - \frac{a}{n}} - \sqrt{2}\right| \leq \varepsilon$$

Entonces dado $\varepsilon > 0$ notemos que hay que encontrar n_0 que cumpla la desigualdad. Entonces busquémoslo! Para n suficientemente grande($n \geq a/2$):

$$\begin{aligned}\left|\sqrt{2-a/n}-\sqrt{2}\right| &= \frac{|2-a/n-2|}{\sqrt{2-a/n}+\sqrt{2}} \\ &= \frac{|-a/n|}{\sqrt{2-a/n}+\sqrt{2}} \\ &= \frac{a/n}{\sqrt{2-a/n}+\sqrt{2}} \\ &\leq \frac{a/n}{\sqrt{2}} = \frac{a}{n\sqrt{2}} \leq \varepsilon \\ &\iff \frac{a}{\sqrt{2}\varepsilon} \leq n\end{aligned}$$

Entonces hay que encontrar un n_0 en el cual a partir de este, si $n \geq n_0$ entonces $\frac{a}{\sqrt{2}\varepsilon} \leq n$, por lo tanto tomando

$$n_0 = \lfloor \frac{a}{\sqrt{2}\varepsilon} \rfloor + 1$$

se cumple!

□

2. Ahora calculemos el limite

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt{2-a/n}-\sqrt{2})$$

Notemos que a priori, no podemos aplicar álgebra de succiones convergentes, pues la sucesión $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge! Transformemos la expresión entonces:

$$\begin{aligned}n(\sqrt{2-a/n}-\sqrt{2}) &= n(\frac{n(2-\frac{a}{n}-2)}{\sqrt{2-a/n}+\sqrt{2}}) \\ &= n(\frac{-a/n}{\sqrt{2-a/n}+\sqrt{2}}) \\ &= \frac{-a}{\sqrt{2-a/n}+\sqrt{2}}\end{aligned}$$

Por lo tanto aplicando ahora el limite a esa expresión queda que

$$\begin{aligned}\lim \frac{-a}{\sqrt{2-a/n}+\sqrt{2}} &= \frac{\lim -a}{\lim \sqrt{2-a/n}+\sqrt{2}} \\ &= \frac{-a}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} \\ &= \frac{-a}{2\sqrt{2}}\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt{2-a/n}-\sqrt{2}) = \frac{-a}{2\sqrt{2}}$$