Departamento de Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA1001: Introducción al Cálculo 2022-1

Pauta de corrección Control 6

P1. a) **(2 pts)** Sea $A = (-\infty, 0) \cup \{5\}$. Demuestre que -5 y 0 son puntos de acumulación de A, pero 5 no lo es.

Solución: Para $\bar{x} = -5$, basta tomar la sucesión $x_n = -5 + \frac{1}{n}$. 0.5

Para $\bar{x} = 0$, basta tomar $x_n = -\frac{1}{n}$. 0.5

Para que $\bar{x} = 5$ sea punto de acumulación, debiera existir una sucesión (x_n) que cumpliera que:

$$\begin{cases} (1) & x_n \to 5 \\ (2) & x_n \neq 5 \\ (3) & x_n \in (-\infty, 0) \cup \{5\} \end{cases}$$ 0.5

Sin embargo, las condiciones (2) y (3) implican que $\forall n$ debiera tenerse que $x_n < 0$. Esta última condición es incompatible con la condición (1). Por lo tanto, tal sucesión no existe. 0.5

b) Para calcular el límite $L = \lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1 + 4^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}$, proceda del modo siguiente:

i) **(2 pts)** Demuestre que $\forall a > 1$ se cumple que $\ell_1 = \lim\limits_{x \to 0} a^x = 1$ y $\ell_2 = \lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$.

Solución: Claramente:

$$a^x = \exp(x \ln a)$$

Usamos el cambio de variables $u = x \ln a \to 0$. 0.5
Claramente se tiene que si $x \neq 0$ entonces $u \neq 0$, ya que $\ln a \neq 0$ (se dice que $a > 1$). 0.5
Por lo tanto

$$\ell_1 = \lim_{u \to 0} \exp(u) = 1$$ 0.5

y

$$\ell_2 = \lim_{u \to 0} \frac{e^u - 1}{\frac{u}{\ln a}} = \ln a.$$ 0.5

ii) (2 pts) Calcule el límite $\ell_3 = \lim_{x\to 0} \dfrac{\frac{1+4^x}{2} - 1}{x}$ y úselo apropiadamente para deducir el valor de L.

Solución: Claramente:

$$\ell_3 = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1+4^x}{2} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{4^x - 1}{x} = \frac{\ln 4}{2} = \ln 2.$$ 0.5

Con esto,

$$L = \lim_{x\to 0} \exp\left\{\frac{1}{x} \ln\left(\frac{1+4^x}{2}\right)\right\} = \lim_{x\to 0} \exp\left\{\frac{\ln\left(\frac{1+4^x}{2}\right)}{\frac{1+4^x}{2} - 1} \cdot \frac{\frac{1+4^x}{2} - 1}{x}\right\}$$ 0.5

$$= \exp\{1 \cdot \ln 2\} = 2.$$ 1.0

P2. Calcule, si existen, los siguientes límites, indicando en cada caso los límites o teoremas auxiliares que use como apoyo.

Obs: Si usa alguna técnica no vista hasta la semana 12 de clases (por ejemplo L'Hôpital) deberá demostrarla previamente para que sea aceptada como solución válida.

a) **(2 pts)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+1}{n^2+\cos(n^2)}\right)^n.$

Solución: Claramente

$$\left(\frac{n^2+1}{n^2+\cos(n^2)}\right)^n = \left(1+\frac{1-\cos(n^2)}{n^2+\cos(n^2)}\right)^n \qquad 1.0$$

Llamando $h_n = \dfrac{1-\cos(n^2)}{n^2+\cos(n^2)}$, se cumple que $h_n \to 0$ y $nh_n \to 0$, por lo tanto, en virtud de Lemma visto en clases, $(1+h_n)^n \to 1$. 1.0

También se puede acotar:

$$1 = \left(\frac{n^2+1}{n^2+1}\right)^n \leq \left(\frac{n^2+1}{n^2+\cos(n^2)}\right)^n \leq \left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)^n = \left(1+\frac{2}{n^2-1}\right)^n \qquad 1.0$$

y ahora usar el mismo lema (o Bernoulli III) para probar que la cota superior tiende a 1 (y por ende el límite pedido) 1.0

OBS: Con Bernoulli III queda:

$$1 \leq \left(\frac{n^2+1}{n^2+\cos(n^2)}\right)^n \leq \left(1+\frac{2}{n^2-1}\right)^n \leq \frac{1}{1-\dfrac{2n}{n^2-1}} \to 1$$

b) **(2 pts)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x^2+9x+4}-2}{x}.$

Solución:
Claramente:

$$\frac{\sqrt{2x^2+9x+4}-2}{x} = \frac{2x+9}{\sqrt{2x^2+9x+4}+2} \qquad 1.0$$

$$\to \frac{9}{\sqrt{4}+2} = \frac{9}{4}. \qquad 1.0$$

c) **(2 pts)** $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen}(x-\frac{\pi}{4})}{2\cos(x)-\sqrt{2}}$.

Solución: Hacemos el cambio de variable: $u = x - \frac{\pi}{4} \to 0$. 0.5

Claramente, si $x \neq \frac{\pi}{4}$, se tiene que $u \neq 0$. 0.5

Así, el límite pedido sería igual a

$$\lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{sen}(u)}{2\cos(u+\frac{\pi}{4})-\sqrt{2}}$$

Claramente:

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{sen}(u)}{2\cos(u+\frac{\pi}{4})-\sqrt{2}} &= \frac{\operatorname{sen}(u)}{\sqrt{2}\cos(u)-\sqrt{2}\operatorname{sen}(u)-\sqrt{2}} \\ &= \frac{\frac{\operatorname{sen}(u)}{u}}{-\sqrt{2}\frac{\operatorname{sen}(u)}{u}-\sqrt{2}\left(\frac{1-\cos u}{u^2}\right)u} \to -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

0.5

0.5