MA1101-3 Introducción al Cálculo
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Patricio Yáñez A.

Auxiliar 1: Axiomas de cuerpo de los Reales

14 de Marzo de 2022

- Axioma 1: Conmutatividad.

$$(\forall x, y \in \mathbb{R})$$

1. $x + y = y + x$
2. $x \cdot y = y \cdot x$

- Axioma 2: Asociatividad.

$$(\forall x, y, z \in \mathbb{R})$$

1. $x + (y + z) = (x + y) + z$
2. $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

- Axioma 3: Distributiva.

$$(\forall x, y, z \in \mathbb{R})$$

1. $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$
2. $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$

- Axioma 4a: Existencia de elemento neutro para la suma.

$$(\forall x \in \mathbb{R})$$

1. $x + e = x = e + x$, Notemos que solo nos garantiza la existencia del neutro pero, no sabemos cuantos hay.

- Axioma 4b: Existencia de elemento neutro para el producto.

$$(\forall x \in \mathbb{R})$$

1. $x \cdot e = x = e \cdot x$, Notemos que solo nos garantiza la existencia del neutro pero, no sabemos cuantos hay.

- Axioma 5: Existencia de elemento inverso.

$$(\forall x \in \mathbb{R})$$

1. $x + \textit{opuesto}(x) = 0$, Notemos que el opuesto o inverso aditivo de x cumple dicha ecuación.
2. $(\forall (x \neq 0))\ x \cdot \textit{recíproco}(x) = 1$, Siendo 1 el neutro aditivo para la la suma, notemos que el recíproco o inverso multiplicativo de x cumple dicha ecuación.

- Teorema: $\forall x \in \mathbb{R}$ su inverso aditivo es único. Además, $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0$, su inverso multiplicativo también es único. Estos elementos se denotarán $-x$ y x^{-1} respectivamente.

P1. [Demostraciones fundamentales.] El objetivo de esta pregunta es ver métodos de demostración en conjunto a probar propiedades fundamentales.
Usando los axiomas de cuerpo de los reales y teoremas de unicidad de neutros e inversos, demuestre las siguientes propiedades:

a) Absorción del 0 o 0 aniquila $\forall a \in \mathbb{R}, a \cdot 0 = 0$
Nota: Recordar lo visto en cátedras que el neutro aditivo es único.

b) $\forall a \in \mathbb{R}, (-a)^{-1} = -(a)^{-1}, a \neq 0$

c) $\exists!$ neutro multiplicativo para el cuerpo de los reales.

d) $\forall x \in \mathbb{R}, (x^{-1})^{-1} = x\ x \neq 0$

e) $\forall a \in \mathbb{R}, a^2 = 0 \Rightarrow a = 0$

f) Sea $ab \neq 0 \Rightarrow (ab)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$

1 Intuición:

2 Teoría:

3 Matraca:

P2. [Relacionando demostraciones y contenido] Cabe mencionar que lo que busca esta pregunta es relacionar los métodos de demostración, trabajarlos y justificarlos mediante axiomas de cuerpo.
Utilizando los axiomas de cuerpo y teoremas de unicidad de neutros e inversos.
Demuestre:
Dado $a, b \in \mathbb{R}$ no nulos,que cumplen $a + b = 1 \Rightarrow$ el inverso multiplicativo de $a \cdot b$, es $a^{-1} + b^{-1}$

1 Intuición:

2 Teoría:

3 Matraca:

P3. [Lógica y Axiomas] El objetivo es relacionar los valores de verdad a través de la justificación axiomática.
Usando sólo los axiomas de cuerpo y los teoremas de unicidad de neutros e inversos, demuestre que:
Si existiera $a \neq 0$ tal que $a + a = 0$, entonces se concluiría que:
$\forall x \in \mathbb{R}, x + x = 0$ Si necesita alguna propiedad extra debe demostrarla.

1 Intuición:

2 Teoría:

3 Matraca:

P4. [Nula] Seguir desarrollando las capacidades, habilidades que se requieren para la materia
Usando sólo los axiomas de cuerpo de los reales y los teoremas de unicidad de neutros e inversos, demuestre la siguiente propiedad, fundamentando cada paso(si necesita alguna propiedad extra, debe demostrarla): Demostrar que si $a \cdot b = a \Rightarrow a = 0$

1 Intuición:

2 Teoría:

3 Matraca: