Geometría Analítica

- Distancia 2 puntos: $A(x_1,y_1)$ $B(x_2,y_2)$ $d(A,B)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
- Punto medio: $A(x_1,y_1)$ $B(x_2,y_2)$ $PM(A,B)=\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}$
- Rectas: $L: ax+by+c=0$

↳ Ec. Principal: $y=mx+n$ → coef posición → corte eje OY

↳ pendiente $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \Rightarrow \boxed{y-y_0=m(x-x_0)}$

↳ Pendientes
- paralelas: $m_1=m_2$
- perpendiculares: $m_1 \cdot m_2=-1$

Circunferencia $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$

↳ centro

↳ $x^2+y^2+Ax+By+T=0$

↳ $a=-A/2$; $b=-B/2$; $r=\sqrt{a^2+b^2-T}$

Secciones Conicas

Parábola ($e=1 \rightarrow \overline{PF}=e\cdot\overline{PD}$) $y=ax^2+bx^2+c$ $\boxed{P=\frac{1}{4a}}$

↳ P. vertical: $(y-y_0)=\frac{1}{4p}(x-x_0)^2$

Vertice: $(x_0,y_0)=\left(\frac{-b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4}\right)$

Directriz: $y=y_0-p$

Foco: $(x,y+p)$

- $p>0$ se abre hacia arriba
- $p<0$ " " " abajo

↳ P. horizontal: $(x-x_0)=\frac{1}{4p}(y-y_0)^2$

Vertice: (x_0,y_0)

Directriz: $x=x_0-p$

Foco: $(x+p,y)$

- $p>0$ se abre hacia la derecha
- $p<0$ " " " " izquierda

Hiperbola ($e>1 \rightarrow \overline{PF} = e\overline{PD}$)

↳ H. Horizontal $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$

Centrada en: (x_0, y_0)

Excentricidad: $e = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$

Directriz: $x = x_0 \pm \frac{a}{e}$

Foco: $(x_0 \pm ae, y_0)$

↳ H. Verticales $\frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(x-x_0)^2}{a^2} = 1$

Centrada en (x_0, y_0)

Excentricidad : $\frac{\sqrt{b^2+a^2}}{b}$

Directriz $y = y_0 \pm \frac{b}{e}$

Foco : $(x_0, y_0 \pm ae$

Asíntotas Oblicuas: $y - y_0 = \pm \frac{b}{a}(x - x_0)$ (mismas asíntotas)

Elipse ($e<1 \rightarrow \overline{PF} = e\overline{PD}$)

↳ E. Horizontal $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$
$a>b$

Centrada en: (x_0, y_0)

Excentricidad: $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$

Directriz: $x = x_0 \pm \frac{a}{e}$

Foco: $(x_0 \pm ae, y_0)$

↳ E. Verticales $\frac{(y-y_0)^2}{a^2} + \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1$
$b>a$

Centrada en: (x_0, y_0)

Excentricidad: $\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}$

Directriz: $y = y_0 \pm \frac{a}{e}$

Foco: $(x_0, y_0 \pm ae)$

Asíntotas Oblicuas: $y - y_0 = \pm \frac{b}{a}(x - x_0)$ (mismas asíntotas

* $d(P,F_1) + d(P,F_2) = 2a$ *

Funciones

$f: A \rightarrow B$
$x \rightarrow y\ f(x)$

A: Dominio
B: Codominio
$y = f(x)$: Imagen de x por f
x: Variable de la función

$G_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in Dom(f) \wedge y = f(x)\}$

* Conjunto imagen: sea $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $\quad Im(f) = \{f(x) : x \in A\}$

Ceros función Cuando $Y=0$, $f(x)=0$, corta eje OX

Paridad funciones $(\forall x \in A) -x \in A$

L Pares: $(\forall x \in A)\ f(-x) = f(x) \rightarrow (x,y) \in Gf \Rightarrow (-x,y) \in Gf$

L Impares: $(\forall x \in A)\ f(-x) = -f(x) \rightarrow (x,y) \in Gf \Rightarrow (-x,-y) \in Gf$

Funciones periódicas $\rightarrow (\forall x \in A)\ x + p \in A$
$\rightarrow (\forall x \in A)\ f(x+p) = f(x)$

p es el periodo de la función

Funciones monotonas $\rightarrow$ creciente $\forall x_1, x_2 \in B,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
$\rightarrow$ decreciente $\forall x_1, x_2 \in B,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

Funciones acotadas $\rightarrow$ inferiormente $(\exists a \in \mathbb{R})$ tq $(\forall x \in Dom f)\ a \leq f(x)$
$\rightarrow$ superiormente $(\exists b \in \mathbb{R})$ tq $(\forall x \in Dom f)\ f(x) \leq b$
$\rightarrow$ acotada $(\exists a, b \in \mathbb{R})$ tq $(\forall x \in Dom f)\ a \leq f(x) \leq b$

Algebra de funciones
↳ suma: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
↳ diferencia: $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
↳ ponderación: $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$
↳ producto $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
↳ cociente $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ con $g(x) \neq 0$

Funciones polinomicas $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0$

Funciones racionales $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0}{a_m x^m + \ldots + a_1 x + a_0} \rightarrow Q(x) \neq 0$

Asintotos de función racional
↳ verticales: $x = x_1;\ x = x_2, \ldots x = x_r$ (cuando se indetermina)
↳ Horizontales: se factoriza por el + grande y ahí se evalúa

Composición funciones $(g \circ f)(x) = g(f(x))$
↳ $Dom(g \circ f) = \{x \in Dom(f) : f(x) \in Dom(g)\}$

*Inyectiva $[f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2]$; Epiyectiva $Im(f) = Cod(f)$; Biyectiva: Ambas juntas

Inversa sea $f: Dom(f) \rightarrow Cod(f)$ una función biyectiva, tiene inversa denotada f^{-1}
↳ $f^{-1}: Cod(f) \rightarrow Dom(f)$ tq $[y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y)]$

Inyectividad

Sea $f: A \to B$,

$\forall x, y \in A,\ x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

$\iff f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

Sobreyectiva

$\forall y \in B,\ \exists x \in,\ y = f(x)$

Lo importante es la interpretación

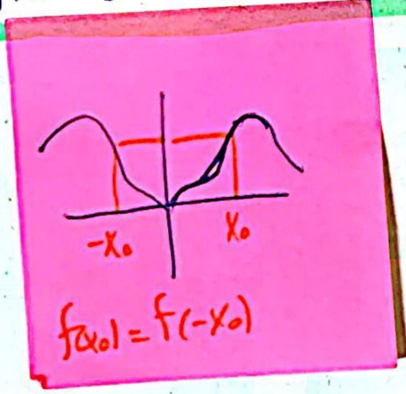
Rec = Cod !!!!

Biyectiva $\iff$ inyectiva $\wedge$ sobreyectiva

1 a 1 — Rec = Cod

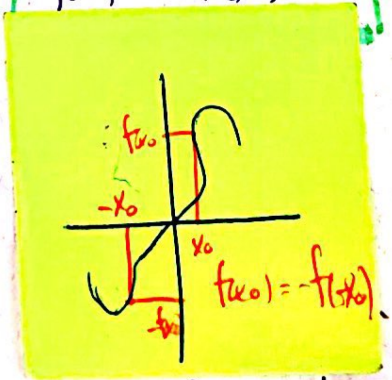
Ceros: $Z(f) := \{x \in Dom(f),\ f(x) = 0\}$

Par: Sea $f(x)$, $f(x) = f(-x)$

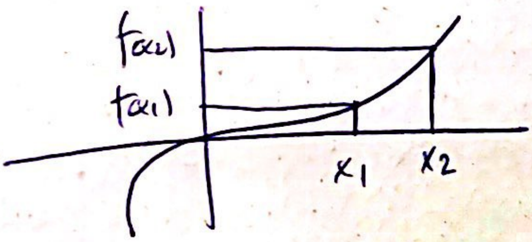


Impar: Sea $f(x)$

$f(x) = -f(-x)$



Crecimiento Sea $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) \geq 0$

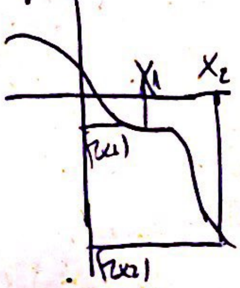


creciente

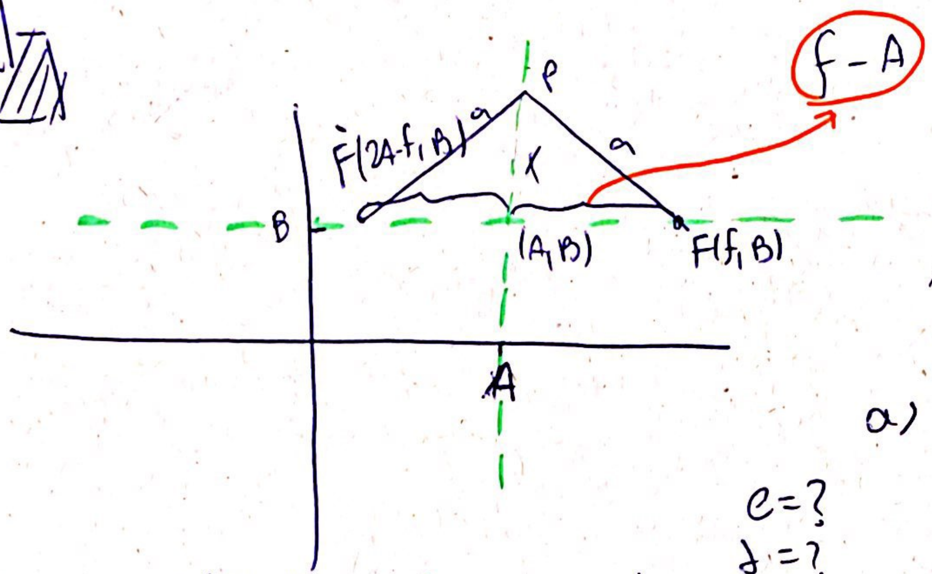
(no necesariamente estricto.)

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) \leq 0$

decreciente.



P1



$f-(f-A)-(f-A)$

$\cancel{f}-\cancel{f}+A+f+A$

$\underline{2A-f}$ ||

$a > f-A$

$e=?$

$d=?$

$C(A, B)$. // Calculamos con pitágoras el valor del semieje menor.

$$x^2+(f-A)^2=a^2$$

$$x=\sqrt{a^2-(f-A)^2} \qquad \underline{x>0}|$$

$\Rightarrow$ **Ecuación**

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-(f-A)^2}=1}$$

$a > f-A$

$1 > \frac{f-A}{a}$ ||

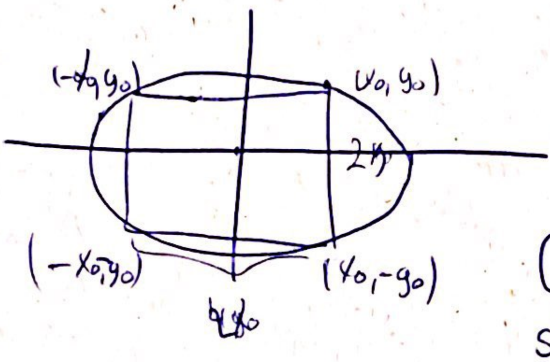
$$\Rightarrow e=\frac{\sqrt{a^2-(a^2-(f-A)^2)}}{a}=\boxed{\frac{f-A}{a}} \ \underline{<1}|$$

directrices $A \pm \frac{a}{e}$ (!)

$$A \pm \frac{a}{\frac{1}{\frac{f-A}{a}}}=A \pm \frac{a^2}{f-A} \ //$$

P2)

1/2) $E: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Encontrar (x_0, y_0)



$A(x_0,y_0) = 4x_0y_0$.

Como es una función siempre positiva

Es equivalente a maximizar su cuadrado

$$A^2(x_0,y_0) = 16x_0^2y_0^2.$$

También tomamos $x_0, y_0 \in E$.

$$\Rightarrow \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y_0^2 = \left(1 - \frac{x_0^2}{a^2}\right)b^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x_0^2)$$

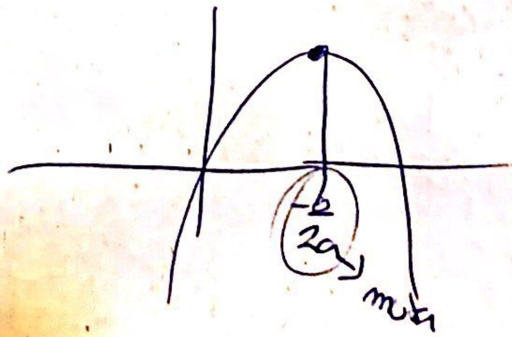
solo ordenar términos

En el cuadrado

$$\Rightarrow A^2(x_0) = 16 \cdot x_0^2 \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x_0^2)$$

$$= 16b^2x_0^2 - 16\frac{b^2}{a^2}x_0^4 \qquad \lambda = x_0^2$$

$$\Rightarrow = 16b^2\lambda - 16\frac{b^2}{a^2}\lambda^2.$$



$$-\frac{b}{2a} \Rightarrow \frac{-16b^2}{-2 \cdot 16\frac{b^2}{a^2}} = \frac{a^2}{2}$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{\cancel{a^2}}{2\cancel{a^2}} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$$

$$y_0 = \frac{b}{\sqrt{2}}$$

Scanned with CamScanner

P3) Determinar dominio

Lo primero y más importante es saber las restricciones,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \Rightarrow Q(x) \neq 0, \ \forall x \in Dom$$

$$\sqrt[2n]{P(x)} \Rightarrow P(x) \geq 0 \ \forall x \in Dom.$$

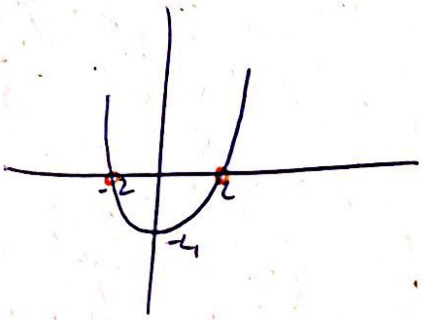
Si tengo combinado $\sqrt{\frac{P(x)}{Q(x)}}$ aplico ambas condiciones.

a) $f(x) = \frac{5}{x^2-4}$

$x^2 - 4 \neq 0$

$x^2 \neq 4$

$\boxed{x \neq \pm 2}$



$\Rightarrow Dom f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

b) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \Rightarrow \frac{x+1}{x-1} \geq 0 \ \wedge \ x - 1 \neq 0$

$\boxed{x \neq 1}$

Tabla signos!! $Sol_2: \mathbb{R} - \{1\}$

	$-\infty$ … -1	-1 … 1	1 … ∞
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
	$+$	$-$	$+$

$Sol_1: (-\infty, -1] \cup (1, \infty)$

$Sol_1 \cap Sol_2 = (-\infty, -1] \cup (1, \infty)$

c) $f(x) = |x^2| - 2$

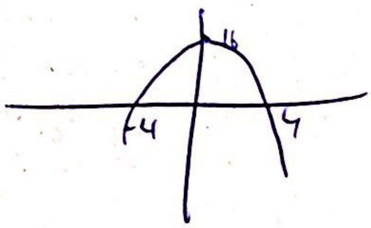
El valor absoluto tiene restricción?

No! !! Sol: $\mathbb{R}$ //

---

d) $\sqrt{16 - x^2} \Rightarrow 16 - x^2 \geq 0$

$16 \geq x^2$ X no hacer eso



$\Rightarrow 16 - x^2 \geq 0$

$(4-x)(4+x) \geq 0$

	$-\infty$	-4	4	∞
$(4-x)$	[crossed out]	+	+	-
$(4+x)$		-	+	+
		-	+	-

$[-4, 4]$: Sol //

P4) Para la paridad

• Par ssi $\boxed{f(x) = f(-x)}$

• IMPAR ssi $\boxed{f(x) = -\,f(x)}$

Ojo los signos.

a) $f(x) = 6x^2 - x - 5$

Veamos $f(-x)$

$6(-x)^2 - (-x) - 5$

$6x^2 + x - 5 \neq f(x)$ No es par

Veamos $-f(-x)$

$-(6(-x)^2 - (-x) - 5) =$

$= -6x^2 - x + 5 \neq f(x)$ No es impar

b) $f(x+1) = 6(x+1)^2 - (x+1) - 5$

$= 6(x^2 + 2x + 1) - (x+1) - 5$

$f'(x) = 6x^2 - 11x$

Veamos $f(x)$

$f(x) = 6(-x)^2 - 11(-x) = 6x^2 + 11x \neq f'(x)$ No es par

Veamos

$-f'(x) = -(6(-x)^2 - 11(-x)) = -6x^2 - 11x \neq f'(x)$ No es IMPAR

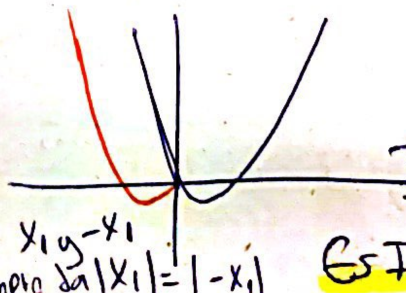
c) $f(|x|) = 6(|x|)^2 - |x| - 5$

↳ solo este cambia

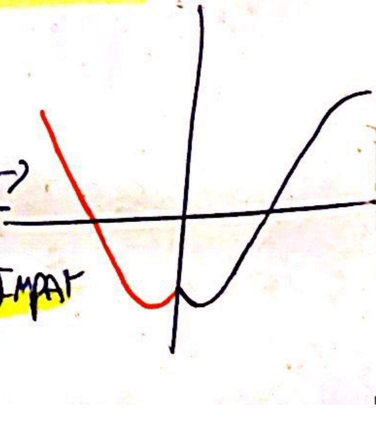
Veamos $f(x)$

$6(|-x|)^2 - |-x| - 5$

dado x, y $-x$, siempre da $|x| = |-x|$. Así que cumple



Es IMPAR



$f'(x) = 6|x|^2 - |x| - 5$

$-f(-x) = -6x^2 + |x| + 5 \neq f'(x)$ No es Impar

• Ceros

a) $6x^2 - x - 5 = 0$ $\qquad \dfrac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 6 \cdot -5}}{12} = \dfrac{1 \pm 11}{12} < \begin{matrix} 1 \\ \boxed{-\frac{5}{6}} \end{matrix}$

$(6x + 5)(x - 1) = 0$

$Z(f) = \{-\frac{5}{6}, 1\}$

Ahora es Biyectiva? Iny $\wedge$ Sobrre

$\downarrow$ tampoco

$\downarrow$ $\forall y \in B, \exists x \in Dom f)$

No cumple $f^{-1}(-\infty, -5), \nexists x \in Dom f)$

$x = \frac{5}{6} \wedge x = 1$

$\Rightarrow f(\frac{5}{6}) = f(1) = 0$

$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ X No cumple

$6x^2 - x - \cancel{5} = 6y^2 - y - \cancel{5}$

Polinomio grado a grado

$\cancel{6}x^2 = \cancel{6}y^2 \wedge x = y$

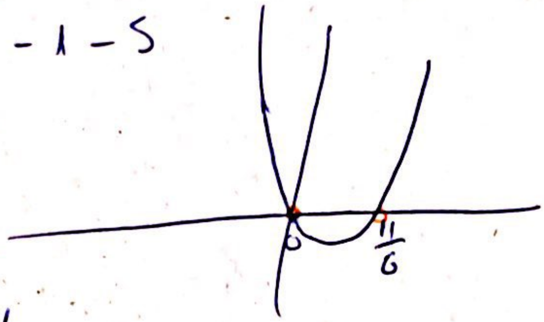
$x = \pm y$

$\Rightarrow$ No Biyectiva pues no inyective $\wedge$ no Sobre.

b) $f(x+1)$

$f'(x) = 6(x+1)^2 - (x+1) - 5$

$f'(x) = 6x^2 + 12x + 6 - x - 1 - 5$
$= 6x^2 - 11x = f'(x)$



$x(6x - 11) = 0$

$Z(f) = \{0, 11/6\}$

Biyectiva? No pues no cumple inyectividad

c) $6(|x|)^2 - |x| - 5 = 0$

$6(x^2) - |x| - 5 = 0$

si $x > 0$

$6x^2 - x - 5 = (6x + 5)(x - 1)$

sol $-\frac{5}{6}$, 1

$\notin \mathbb{R}^+$ $\quad \in$ Dom $\mathbb{R}^+$

si $x < 0$

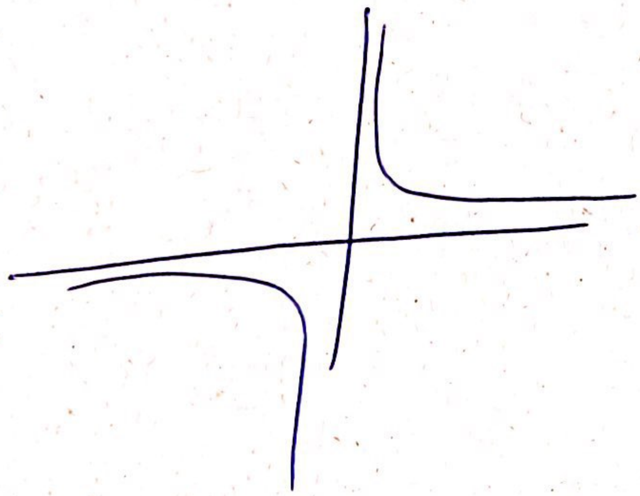
$6x^2 + x - 5 = (6x - 5)(x + 1)$

sol -1, $\frac{5}{6}$

$\in \mathbb{R}^-$ $\quad \cancel{\in} \mathbb{R}^+$

$\Rightarrow Z(f) = \{-1, 1\}$. No Biyectiva por inyectividad y sobre.

a) $f(x) = \frac{1}{x}$



Cómo vemos esto.

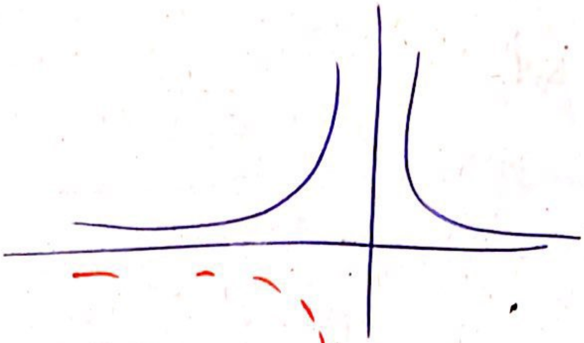
- $f(x) = -f(-x) \Rightarrow \frac{1}{x} = -\frac{1}{(-x)}$ Es Impar.
- Dom: $\mathbb{R} - \{0\}$
- $f(x) = f(y)$

  $\frac{1}{x} = \frac{1}{y} \Rightarrow x = y$ Inyectiva //
- Rec: $\{\mathbb{R} - \{0\}\} \neq \{Cod = \mathbb{R}\}$ No sobreyectiva
- $Z(f) = \emptyset$
- Asíntota. $x = 0$ Horizontal

  $y = 0$ Vertical

Al revés casi

b) $f(x) = \frac{1}{|x|}$



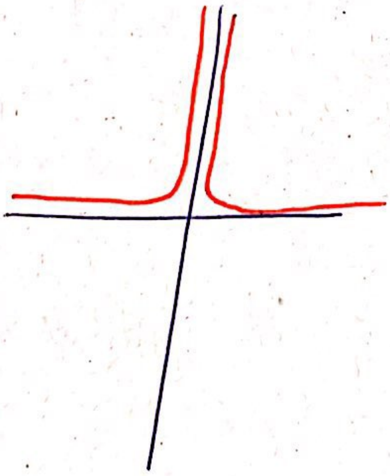
- Dom $= \mathbb{R} - \{0\}$
- Asintotas $x=0$, $y=0$
- Paridad

$f(x) = f(-x) \Rightarrow \frac{1}{|-x|} = \frac{1}{|x|} \Rightarrow$ PAR

- No biyectiva, pues no inyectiva
- $Z(f) = \emptyset$.

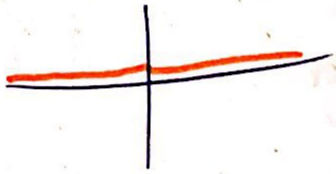
Puede ser útil ver cortes con los ejes cuando hagan.

c) $\frac{1}{x^2} = f(x)$

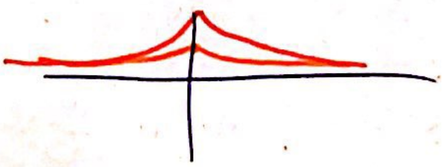


#Verificar

d) $f(x) = \frac{1}{|x|+2}$ → si sumo más al denominador



si sumo menos



¿Y si resto?

P6

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$$

Dom f

$x^2 - 1 \neq 0$

$x^2 \neq +1$ $\forall x \in \mathbb{R}$ cumple

$x = \pm 1$

$\Rightarrow$ Dom $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

Paridad

$f(-x) = f(x)$?

$$f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2 - 1} = \frac{-x}{x^2 - 1} \neq f(x)$$

$\therefore$ No es par

$$-f(x) = -\left(\frac{-x}{(-x)^2 - 1}\right) = \frac{x}{x^2 + 1} = f(x)$$

$\therefore$ Es par

Ojo con los signos
Par $\wedge$ IMPAR
$\exists! f, \in \mathcal{F} \setminus f(x) = 0$

- Signos

$$f(x) = \frac{x}{x^2-1} = \frac{x}{(x+1)(x-1)}$$

	$-\infty$	-1	0	$+1$	∞
x	$-$	$-$	$+$	$+$	
$x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$	
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$+$	
	$-$	$+$	$-$	$+$	

$f(x) > 0$ si $x \in (-1,0) \cup (1,\infty)$

$f(x) < 0$ si $x \in (-\infty,-1) \cup (0,1)$ //

- Asíntota

Verticales indeterminaciones.

$x = -1 \wedge x = 1$

horizontales

¿qué ocurre si avanzo hacia los extremos?

$\underline{y = 0}$ ||

b) $f(x_2)-f(x_1) = \dfrac{(1+x_2x_1)(x_1-x_2)}{((x_1)^2-1)(x_2^2-1)}$

$$\frac{x_2}{x_2^2-1} - \frac{x_1}{x_1^2-1} = \frac{x_2(x_1^2-1) - x_1(x_2^2-1)}{((x_1^2)-1)(x_2^2-1)}$$

$$= \frac{x_2x_1^2 - x_2 - x_1x_2^2 + x_1}{(x_1^2-1)(x_2^2-1)}$$

$$= \frac{(x_1-x_2) + x_1x_2(x_1-x_2)}{(x_1^2-1)(x_2^2-1)}$$

$$= \frac{(x_1-x_2)(1+x_1x_2)}{(x_1^2-1)(x_2^2-1)} \,//$$

Como f impar basta estudiar ↗ v ↘ en un intervalo.

Si $x \in (0,1)$ y $x_1 < x_2$

$$\frac{(x_1-x_2)(1+x_1x_2)}{(x_1^2-1)(x_2^2-1)} = \frac{\ominus \cdot \oplus}{\ominus\ \ominus} = \ominus = f(x_2)-f(x_1) < 0$$

$\therefore \searrow //$ Además $f(x) < 0$

Si $x \in (1,\infty) \wedge x_1 < x_2$

$$\frac{(x_1-x_2)(1+x_1x_2)}{(x_1^2-1)(x_2^2-1)} = \frac{\ominus\ \oplus}{\oplus\ \oplus} = \ominus = f(x_2)-f(x_1)$$

$\therefore \searrow$ Además $f(x) > 0$

Como es impar análogo

si $x \in (-1,0)$ ↙ pero ahora $f(x) > 0$

si $x \in (-\infty,-1)$ ↙ pero ahora $f(x) < 0$

c) $f(1,\infty)$

$$l(x): (1,\infty) \to f(1,\infty)$$
$$x \to l(x) := f(x)$$

Es sobreyectiva por definición

Luego $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

$f(x) - f(y) = 0 \Rightarrow x = y$ ssi inyectiva

$$\frac{(x_1 - x_2)(1 + x_1 x_2)}{(x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1)}$$

$$\Rightarrow \frac{(x-y)(1+xy)}{(x^2-1)(y^2-1)} = 0$$

ssi $1 + xy = 0 \lor x - y = 0$

$x = \frac{-1}{y}$ $\qquad x = y$

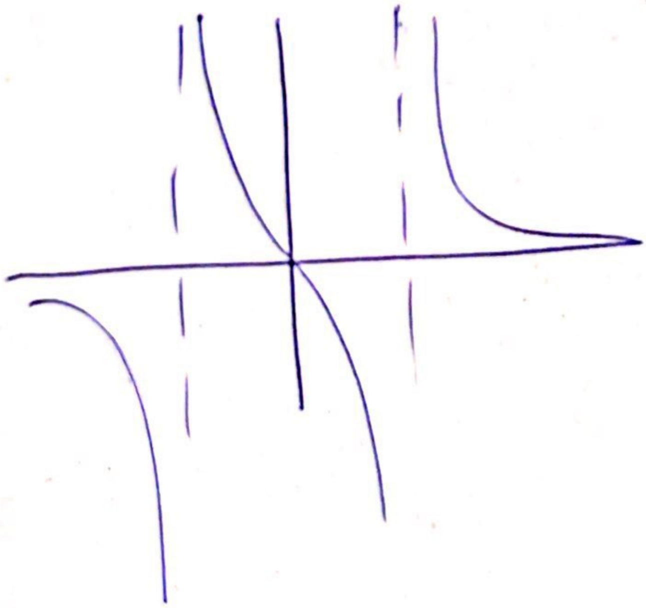
$\notin$ Dom $\Rightarrow \underline{x = y}$

Luego su inversa

$$y = \frac{x}{x^2-1}$$

$$yx^2 - y - x = 0$$

$$x = \frac{+1 \pm \sqrt{1^2 + 4y \cdot y}}{2y}$$ cambio variables



Terminamos !

walquier duda a mi correo

pyanez@dim.uchile.cl