Encargado Chat: Benja

Cónicas y Funciones

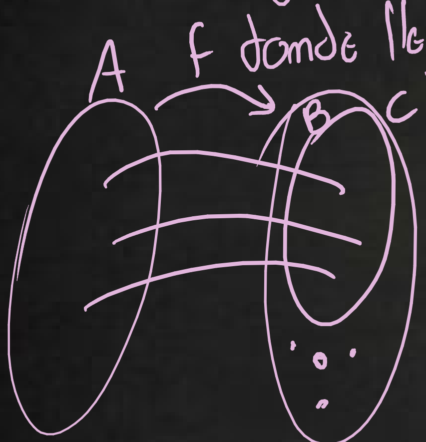
$\underbrace{\text{Funciones}}_{\text{Rápido}}$

2 Definiciones de funciones

Cálculo

$f: A \to B \subseteq C$

- A → Dominio
- B → Recorrido → donde llegó
- C → Codominio → Podría llegar y donde llegué



$B \subseteq C$

84

$f(x)$ Imágenes

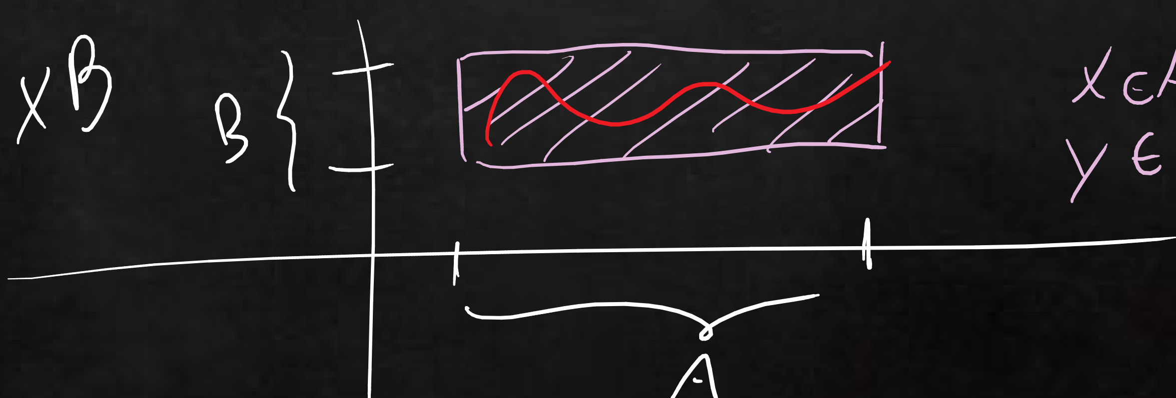
Álgebra (Pág 54, 4.1)

Cumple relación 3-tupla (A, B, G) ← grafo

- $G \subseteq A \times B$
- $\forall a \in A,\ \exists!\, b \in B,\ f(a) = b$

$(x_1, f(x_1)) \in G$

$A \times B$



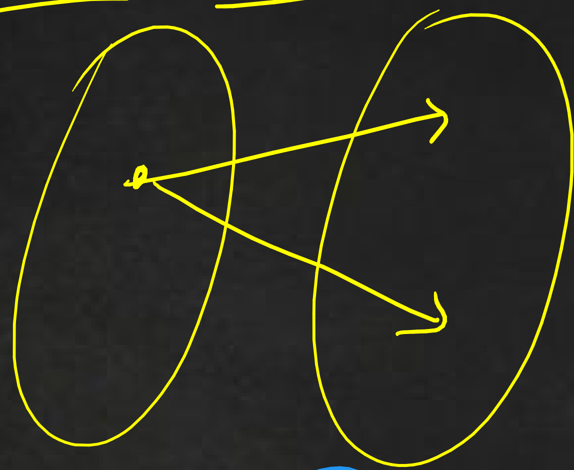
$x \in A$

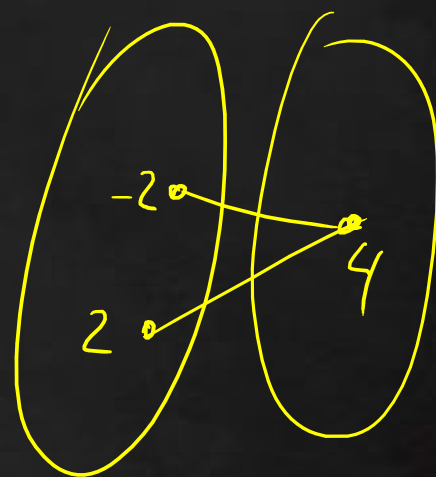
$y \in B$

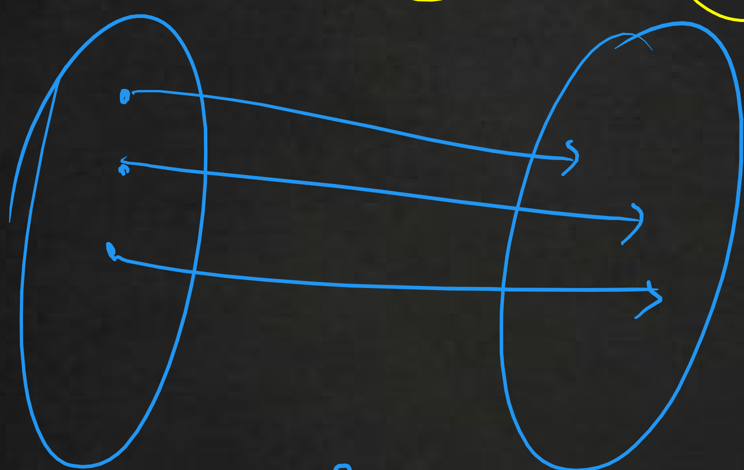
Álgebra | 3-tupla (A, B, G)

- $G \subseteq A \times B$
- $\forall a \in A,\ \exists! b \in B,\ f(a) = b$

$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x \geq y \iff V$



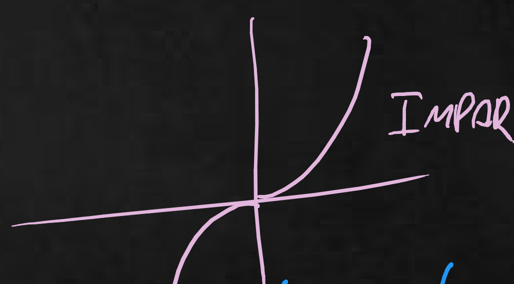




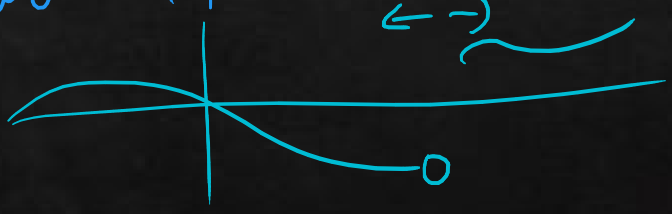
Sea la función | Cálculo

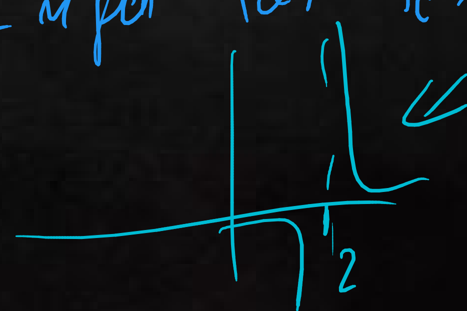
$f(x) = \dots$

1) Dominio



2) Paridad (Par $f(x) = f(-x)$) (Impar $f(x) = -f(-x)$)





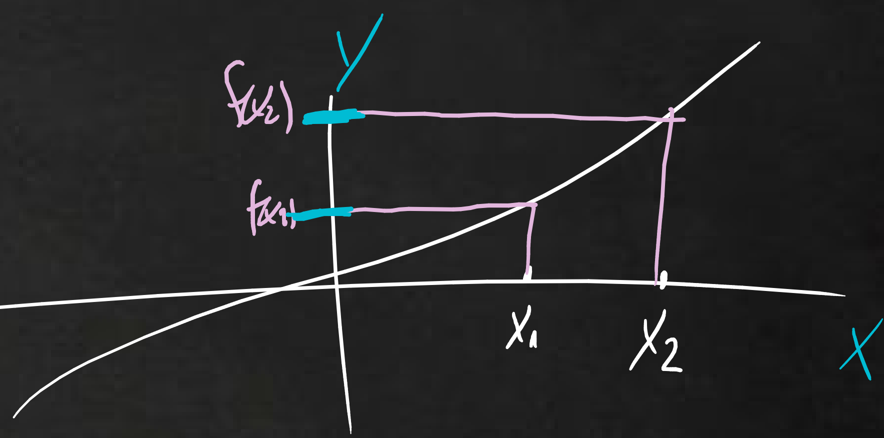
Impar $f(x) = -f(-x)$

Apunte 86 Imparidad

$$-f(x) = f(-x) \quad / \cdot -1$$
$$f(x) = -f(-x)$$

Crecimiento de función. (¿Puedo derivar? No)

1) Con la resta



Cuando quiero ver crecimiento necesito colocar un orden en lo que estoy haciendo

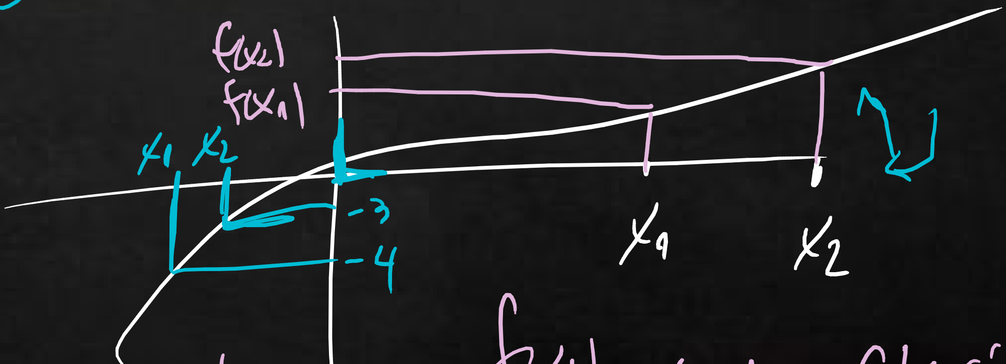
SPG (sin pérdida generalidad) $x_1 < x_2$

x_1, x_2 arbitrario

$f(x_2) - f(x_1) \geq 0$ (Creciente) ($>$ creciente estricto)

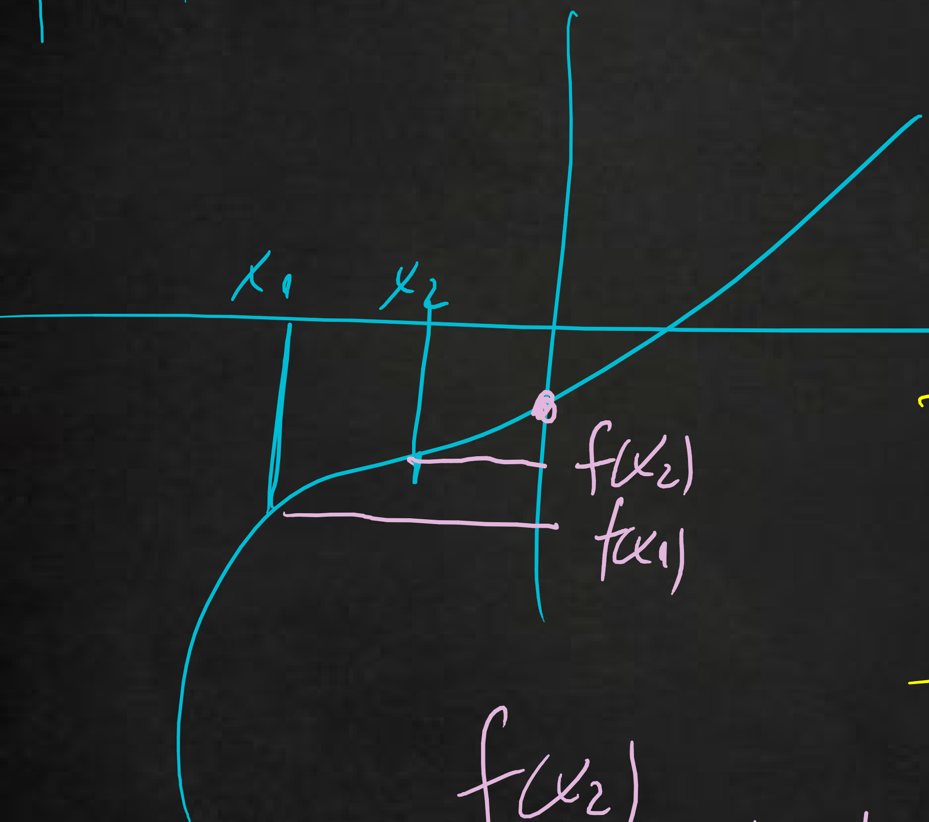
$f(x_2) - f(x_1) \leq 0$ (Decreciente) (<0 decreciente estricto)

2) Cociente,



$$\frac{f(x_1)}{f(x_2)} \geq 1$$ decreciente,

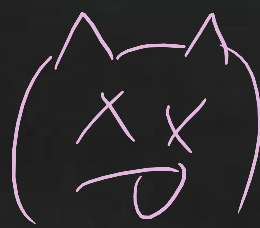
$$\frac{f(x_1)}{f(x_2)} \leq 1$$ Creciente



x_1, x_2 Mismo signo !

$$\frac{f(x_2)}{f(x_1)} \leq 1 \quad \Big| \quad \frac{f(x_1)}{f(x_2)} \geq 1$$

$f(x) = \frac{1}{x}$



1) $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

2) Paridad. $f(x) = f(-x)$?

$$f(-x) = \frac{1}{-x} \neq \frac{1}{x} \quad \therefore \text{No es par}$$

Imparidad

$$f(x) = -f(-x)$$

$$-f(-x) = -\left(\frac{1}{-x}\right) = \frac{1}{x} = f(x)$$

$\therefore$ IMPAR

$f(x) = \frac{1}{x}$

1) $Dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

2) IMPAR

3) Signos

$f(x) > 0 \iff \frac{1}{x} > 0$, $x \neq 0$

	$-\infty$	0	$+\infty$
1	$+$		$+$
x	$-$		$+$
	$-$		$+$

$f(x) > 0$, si $x \in (0, +\infty)$

$f(x) < 0$, si $x \in (-\infty, 0)$

Crecimiento, $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 > 0$

$$\frac{f(x_1)}{f(x_2)} = \frac{\frac{1}{x_1}}{\frac{1}{x_2}} = \frac{x_2}{x_1} > 1$$

Si concluyo que soy mayor que 1 entonces

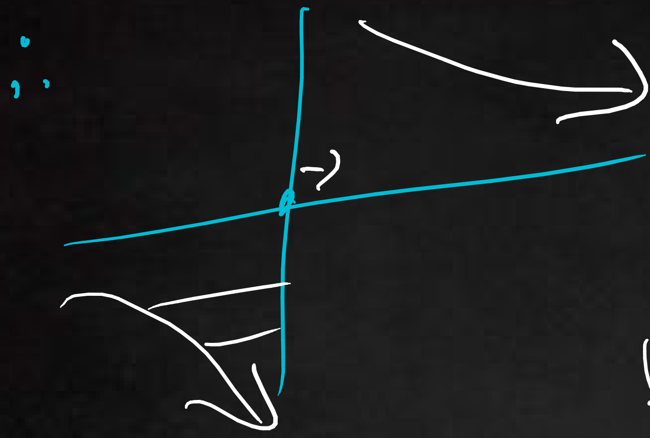
$$\frac{f(x_1)}{f(x_2)} \geq 1$$

$\Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

$\Rightarrow$ Decreciente,

$\Rightarrow f(x)$ decrece en $(0, +\infty)$

Pero $f(x)$ Impar



Dom ✓ Paridad ✓

Crecimiento ✓ Signos ✓

Crecimiento de forma (no ortodoxa)

(Resta) $x_1 < x_2$

$f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, < 0 $\qquad x_1 < x_2$

$\frac{1}{x_2} \cdot \underbrace{\frac{x_1}{x_1}}_{1} - \frac{1}{x_1} \cdot \underbrace{\frac{x_2}{x_2}}_{1}$, $x_1, x_2 > 0$

TABLA

$= \frac{x_1 - x_2}{x_2 x_1} \leq 0$ $\qquad x_1 < x_2 \; / -x_2$

$x_1 - x_2 < 0$

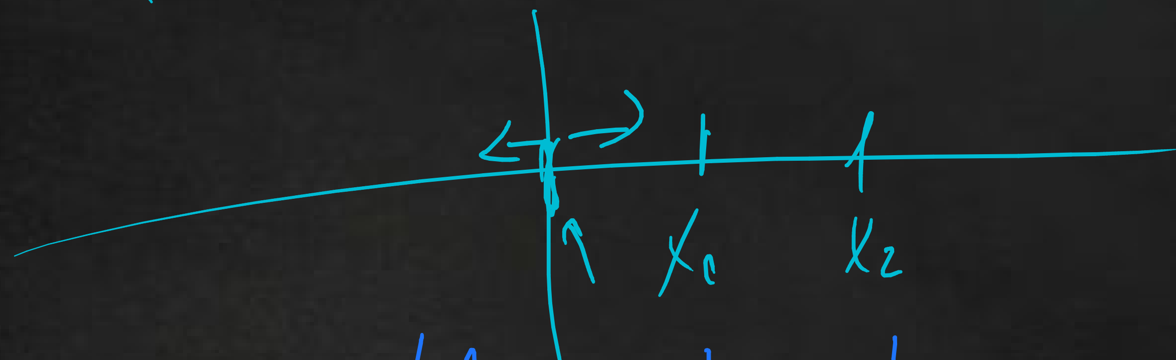
$\frac{-}{+}$

$\Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

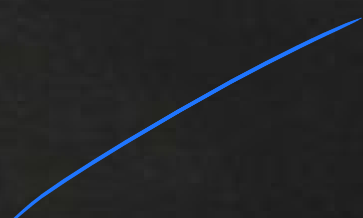
$\Rightarrow$ Decreciente

$x_1 - x_2$	$-$
$x_2 x_1$	$+$

Asíntota: Una recta a la cual me acerco pero en su intervalo no lo tomo



Asíntota
- → Horizontal → recta no toco —
- → Vertical → recta | no toco
- → Oblicua



no toco

$y = mx + n$

$m \neq 0$

Vertical, $x =$ indeterminación

Horizontal $x >>>>>>>>>> 1$

$x <<<<<<<<< -1$

$x >>>>>>>>>>> 1$

$\frac{1}{x}$ $\qquad f(x) = \frac{1}{x}$

$\frac{1}{100} = 0{,}01$

$\frac{1}{1000000} = 0{,}000001$

$\frac{1}{x} \longrightarrow 0$

$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, $\quad$ grado$(Q(x)) >$ grado$(P(x))$

Asintota Horizontal $\quad y = 0$

$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, $\quad$ grado$(P(x)) =$ grado$(Q(x))$

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

signos $\to$ $f(x) \geq 0 \quad x \in (0, +\infty)$

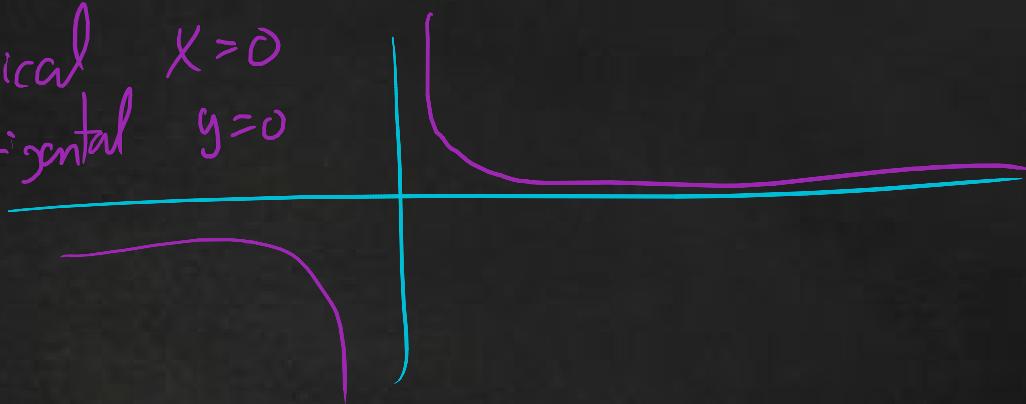
$f(x) < 0 \quad x \in (-\infty, 0)$

Impar

Decreciente en su dominio

Asíntota vertical $x=0$

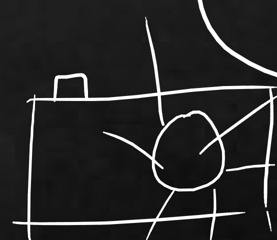
Asíntota horizontal $y=0$



$\Rightarrow \mathrm{Rec}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

Volvemos $\underline{21:27}$

Momento Café



+ Sacar foto de café, luego hacemos compilado

... a la vuelta Hablemos de pizza ... Joaco (9) Javi (1)

$$f(x) = \frac{x}{x^2-1}$$

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$x^2 - 1 \neq 0$$
$$x^2 \neq 1$$
$$x \neq \pm 1$$

Signo $f(x) \geq 0$

$$\rightarrow \frac{x}{(x-1)(x+1)} \geq 0$$

	$-\infty$ -1	-1 0	0 1	1 $+\infty$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$
	$-$	$+$	$-$	$+$

$f(x) < 0$ si $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$

$f(x) \geq 0$ si $x \in (-1, 0] \cup (1, +\infty)$

Paridad

$f(x) = f(-x)$

$$f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2-1} = \frac{-x}{x^2-1} \neq \frac{x}{x^2-1}$$ ($f(x)$)

No PAR

IMPAR $f(x) = -f(-x)$

$$-(f(-x)) = -\left(\frac{-x}{(-x)^2-1}\right) = \frac{x}{x^2-1} = f(x)$$

$\therefore$ IMPAR ✓

Crecimiento: $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in (1, \infty)$

Cociente

$$\frac{f(x_1)}{f(x_2)} = \frac{\frac{x_1}{(x_1-1)(x_1+1)}}{\frac{x_2}{(x_2-1)(x_2+1)}}$$

$(-\infty, -1) \; (-1, 0) \; [0, 1) \; (1, \infty)$

IMPAR

$$\frac{f(x_1)}{f(x_2)} = \frac{\dfrac{x_1}{(x_1-1)(x_1+1)}}{\dfrac{x_2}{(x_2-1)(x_2+1)}} = \underbrace{\frac{x_1}{x_2}}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\frac{(x_2-1)}{(x_1-1)}}_{\geq 1} \underbrace{\frac{(x_2+1)}{(x_1+1)}}_{\geq 1}$$

$x_1 < x_2$

$x_1, x_2 \in (1, \infty^+)$

No me sirve caso cociente

Resta

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{x_2 (x_1^2-1)}{(x_2^2-1)(x_1^2-1)} - \frac{x_1}{(x_1^2-1)} \cdot \frac{(x_2^2-1)}{(x_2^2-1)}$$

$$= \frac{x_2 \cdot x_1^2 - x_2 - x_1 x_2^2 + x_1}{(x_2^2-1)(x_1^2-1)}$$

$$= \frac{(x_1-x_2) + x_1 x_2 (x_1 - x_2)}{(x_2^2-1)(x_1^2-1)}$$

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{(x_1-x_2)(1 + x_1 x_2)}{(x_2^2-1)(x_1^2-1)} \begin{array}{l} \geq 0 \\ < 0 \end{array}$$

$$f(x_2)-f(x_1) = \frac{(x_1-x_2)(1+x_1x_2)}{(x_2^2-1)(x_1^2-1)} \quad \begin{matrix} > 0 \\ < 0 \end{matrix}$$

$(-\infty,-1)\ (-1,0]\ (0,1)\ (1,\infty)$ → IMPAR

1) $x \in (0,1)$, $x_1 < x_2$

$$f(x_2)-f(x_1) = \frac{\overset{-}{(x_1-x_2)}\overset{+}{(1+x_1x_2)}}{\underset{-}{(x_2^2-1)}\underset{-}{(x_1^2-1)}} = -$$

$\uparrow \quad \uparrow$

$\therefore$ $f(x)$ decreciente $x \in (0,1)$

$0 < x_1 < 1 \quad /(\ )^2$

$0 < x_1^2 < 1 \quad /-1$

$-1 < x_1^2 < 0$

Si: $x \in (1, \infty)$, $x_1 < x_2$

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{(x_1 - x_2)(1 + x_1 x_2)}{(x_2^2 - 1)(x_1^2 - 1)}$$

En efecto, veamos análisis de signo

- Si $x_1 < x_2 \iff x_1 - x_2 < 0$
  $\Rightarrow$ signo $(x_1 - x_2) < 0$
- Si $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$

$\iff 1 < x_1 \quad / ()^2, \ x_1 > 0$ se preserva el orden de la desigualdad

$\iff 1^2 < x_1^2$

$\iff 1 < x_1^2 \quad / -1$ luego

$\iff 0 < x_1^2 - 1$

$\therefore$ signo $(x_1^2 - 1) > 0$

- Análogo $x_2^2 - 1 > 0$
- $x_1, x_2 \in (1, \infty) \Rightarrow x_1 x_2 \in (1, \infty)$

$\Rightarrow 1 + x_1 x_2 > 2$

$$\ominus \qquad \oplus$$

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{(x_1 - x_2)(1 + x_1 x_2)}{(x_2^2 - 1)(x_1^2 - 1)} = \ominus$$

$$\oplus \qquad \oplus$$

$x \in (1, +\infty)$

$\therefore f(x)$ decreciente

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{x}{(x+1)(x-1)}$$

$\Rightarrow$ Asintota vertical

$$\frac{x}{x^2 - 1}$$

$x = 1$

$x = -1$

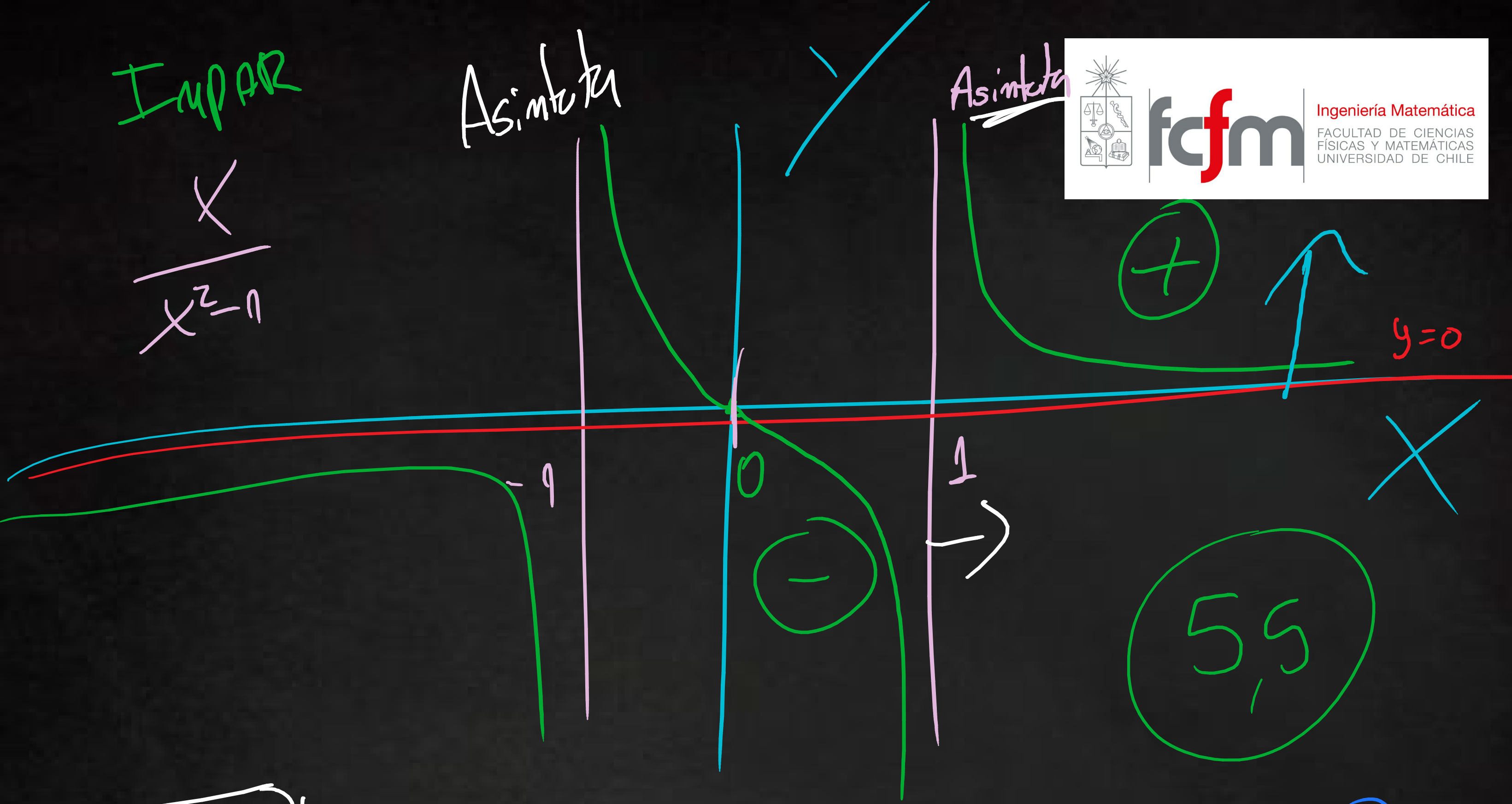
$P(x) = x^1$ grado $(P(x)) = 1$

$Q(x) = x^2 - 1$ grado $(Q(x)) = 2$

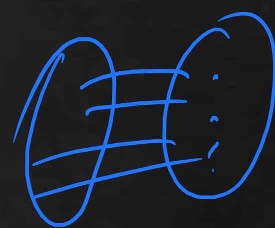
luego $\frac{P(x)}{Q(x)}$ cuando se va a x grandes $\oplus$ la fracción se va a 0

IMPAR

$$\frac{x}{x^2-1}$$



Redefino $f:(1,+\infty)\to(0,+\infty)$



$\boxed{\text{Rec}=\text{Cod}}$ $l(x):(1,+\infty)\to f((1,\infty))$

$\to l(x): f(x)$

Inyectiva • $\forall a\in A,\ \exists!\, b\in B \quad f(a)=b \qquad B\subseteq C$

$$l(x_1)=l(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$$

$$\iff l(x_2)-l(x_1)=0$$

$$l(x_2)-l(x_1)=\frac{(x_1-x_2)(1+x_1x_2)}{(x_2^2-1)(x_1^2-1)}=0$$

$x_1-x_2=0 \Rightarrow \boxed{x_1=x_2}$

$\vee\ 1+x_1x_2=0$

$\therefore$ Inyectiva

- Soy sobreyectiva por definición $l(x)$

$\therefore$ Soy biyectivo

$\Rightarrow$ Inversa

$$\boxed{\begin{array}{l} ax^2 + bx + c = 0 \\ yx^2 - 1\cdot x - y = 0 \end{array}}$$

$$y = \frac{x}{x^2-1} \iff yx^2 - y - 1x = 0$$

$$a = y, \quad b = -1, \quad c = -y$$

$$yx^2 - y - x = 0$$

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

$x =$

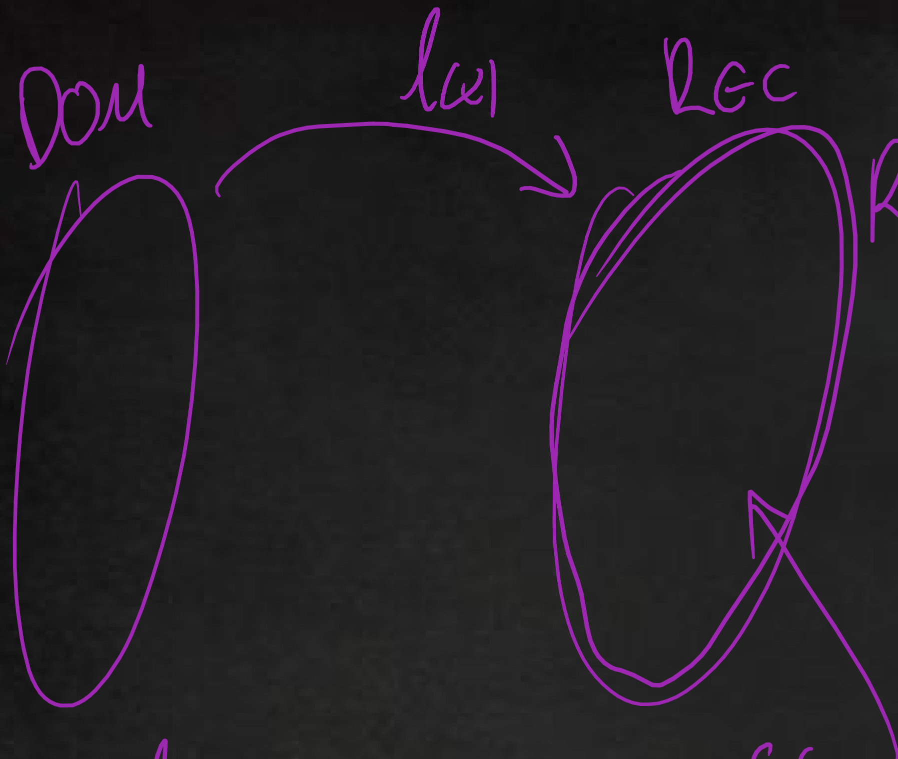
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4y^2}}{2y}$$

$$l^{-1}(x) = \frac{1 + \sqrt{1 + 4x^2}}{2x}$$

1) $l^{-1}(l(x)) = x$ si solo si

2) $l(l^{-1}(x)) = x$, si $x \in (1, +\infty)$ ✓

7,0



Rec = Cod

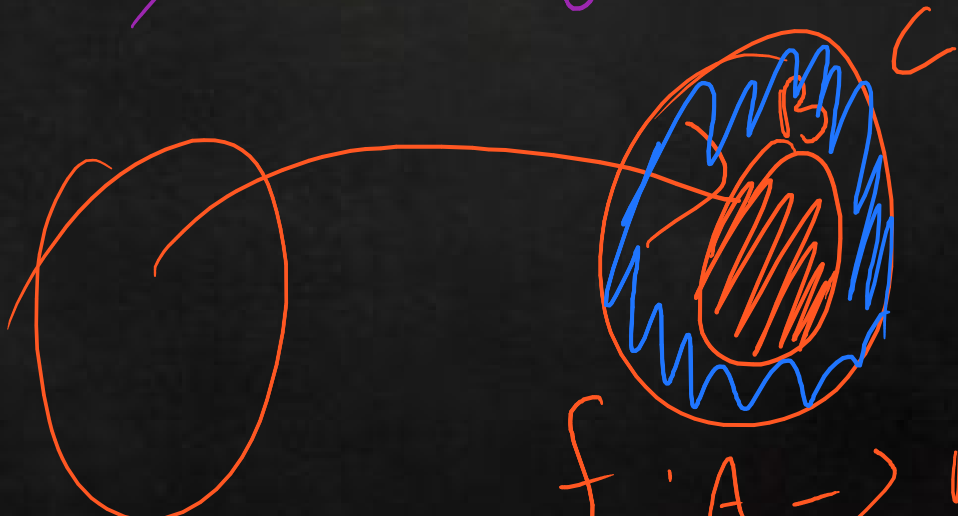
$\ln(x) : (1,+\infty) \to f(1,+\infty)$

$f : A \to B \subseteq C$

$\uparrow \qquad \uparrow$

Rec = codominio

$\Rightarrow$ sobreyectivo



$B = C$

$f : A \to B \subseteq C$

$$f(x) = f(y)$$

$$\left.\frac{x}{x^2-1} = \frac{y}{y^2-1}\right\} \quad x = y$$

$$\wedge \quad x^2 - 1 = y^2 - 1$$

$$x^2 = y^2$$

$$\boxed{\frac{x}{x^2-1} - \frac{y}{y^2-1} = 0}$$

Forma A $\Rightarrow x = y$