P1| Hay que probar 4 cosas para decir que $\mathcal{E}$ es una partición de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$:

① $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$:

Sea $L_n \in \mathcal{E}$ arbitrario ($n \in \mathbb{N}$).

PDQ $\underbrace{L_n \in \mathcal{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N})}_{\Leftrightarrow}$

$L_n \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$

En efecto, sea $(x,y) \in L_n$ arbitrario.

Por def. de L_n se tiene $(x,y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

$\therefore L_n \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

② $\forall L_n \in \mathcal{E},\ L_n \neq \emptyset$:

Sea $L_n \in \mathcal{E}$ arbitrario ($n \in \mathbb{N}$).

PDQ $L_n \neq \emptyset$.

Notar que $(x,y) = (0,n) \in L_n$ (pues $n = 0+n$)

$\therefore L_n \neq \emptyset$.

③ $\forall L_n, L_m \in \mathcal{E},\ L_n \neq L_m \Rightarrow L_n \cap L_m = \emptyset$:

Sean $L_n, L_m \in \mathcal{E}$ arbitrarios ($n, m \in \mathbb{N}$) tq $L_n \neq L_m$ ($n \neq m$).

PDQ $L_n \cap L_m = \emptyset$.

Sup. que no, ie $\exists (x,y) \in L_n \cap L_m$

$\Rightarrow y = x+n \wedge y = x+m$

$\Rightarrow n = y-x = m$

$\Rightarrow n = m \rightarrow\leftarrow$

$\therefore L_n \cap L_m = \emptyset$.

④ $\bigcup_{L_n \in \mathcal{E}} L_n = \mathbb{N}\times\mathbb{N}$:

Por doble inclusión:

$\subseteq$| Sea $(x,y) \in \bigcup_{L_n \in \mathcal{E}} L_n$ arbitrario.

$\underset{(\text{def. de } \cup)}{\Longrightarrow} \exists L_n \in \mathcal{E}$ ($n \in \mathbb{N}$) tq $(x,y) \in L_n$

$\underset{(L_n \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N})}{\Longrightarrow} (x,y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

$\therefore \bigcup_{L_n \in \mathcal{E}} L_n \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

$\supseteq$| Sea $(x,y) \in \overset{(x,y\in\mathbb{N})}{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ arbitrario.

Luego $\exists n \in \mathbb{N}$ tq $n = y-x$ (pues $x,y \in \mathbb{N}$), ie $y = x+n$.

Esto nos dice que $(x,y) \in L_n$

y como $L_n \subseteq \bigcup_{L_n \in \mathcal{E}} L_n$, entonces

$(x,y) \in \bigcup_{L_n \in \mathcal{E}} L_n$.

$\therefore \mathbb{N}\times\mathbb{N} \subseteq \bigcup_{L_n \in \mathcal{E}} L_n$.

Así, se prueba que $\mathcal{E}$ es una partición de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ $\blacksquare$

MA1001/MA1101- Secciones 1/9, Otoño 2022
Auxiliares: Javier Santidrián Salas - Patricio Yáñez Alarcón

TPCA 2 (Todes Pasamos Cálculo y Álgebra)

Fecha: 22/04/22

Álgebra

P2. Funciones

Sean A, B, C, D cuatro conjuntos no vacíos y $f : A \to C$ y $g : B \to D$ dos funciones biyectivas. Se define $\mathcal{F}_{A,B} := \{\alpha : A \to B \mid \alpha \text{ es función}\}$ y $\mathcal{F}_{C,D} := \{h : C \to D \mid h \text{ es función}\}$. Considere $\varphi : \mathcal{F}_{A,B} \to \mathcal{F}_{C,D}$ definida para cada $\alpha \in \mathcal{F}_{A,B}$ por $\varphi(\alpha) = g \circ \alpha \circ f^{-1}$.

a) Justifique que φ está bien definida y muestre de dos formas distintas que es una biyección.

b) Pruebe que $\forall \alpha \in \mathcal{F}_{A,B}$, α es inyectiva (epiyectiva) $\iff$ $\varphi(\alpha)$ es inyectiva (epiyectiva).

Solución:

a) Veamos que φ está bien definida, es decir que $\forall \alpha \in \mathcal{F}_{A,B}, \exists! h \in \mathcal{F}_{C,D}, \varphi(\alpha) = h$. En efecto, sea $\alpha \in \mathcal{F}_{A,B}$ arbitrario. Notemos que $\varphi(\alpha) = g \circ \alpha \circ f^{-1} \in \mathcal{F}_{C,D}$, es decir, es una función de C en D, lo cual es directo por propiedades del dominio y codominio de la composición, ya que $Dom(\varphi(\alpha)) = Dom(f^{-1}) = C$ y $Cod(\varphi(\alpha)) = Cod(g) = D$, luego $h = g \circ \alpha \circ f^{-1} \in \mathcal{F}_{C,D}$ es la única función que cumple que $\varphi(\alpha) = h$, lo que prueba que la función φ está bien definida. Ahora, veamos que es biyectiva de dos formas distintas.

- **Forma 1 (Inyectividad y Epiyectividad)**: φ es inyectiva. En efecto, sean $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{F}_{A,B}$ arbitrarios tal que $\varphi(\alpha_1) = \varphi(\alpha_2)$. Esto nos dice por la definición de φ que:

$$g \circ \alpha_1 \circ f^{-1} = g \circ \alpha_2 \circ f^{-1} \tag{1}$$

$$\underbrace{\implies}_{g^{-1}\circ\ ,\ \circ f} g^{-1} \circ (g \circ \alpha_1 \circ f^{-1}) \circ f = g^{-1} \circ (g \circ \alpha_2 \circ f^{-1}) \circ f \tag{2}$$

$$\underbrace{\implies}_{\text{Asoc.}} \underbrace{(g^{-1} \circ g)}_{=id_B} \circ \alpha_1 \circ \underbrace{(f^{-1} \circ f)}_{=id_A} = \underbrace{(g^{-1} \circ g)}_{=id_B} \circ \alpha_2 \circ \underbrace{(f^{-1} \circ f)}_{=id_A} \tag{3}$$

$$\underbrace{\implies}_{\text{Prop. Identidad}} \alpha_1 = \alpha_2 \tag{4}$$

por lo que φ es inyectiva. Ahora, veamos que φ es epiyectiva. En efecto, sea $h \in \mathcal{F}_{C,D}$ arbitrario. Hay que encontrar $\alpha \in \mathcal{F}_{A,B}$ tal que $\varphi(\alpha) = h$. Para ello, impongamos esta igualdad y despejemos α de la expresión de φ en función de h (así podremos saber cuál es el α que debemos tomar para que se cumpla lo que queremos), es decir:

$$\varphi(\alpha) = h \tag{5}$$

$$\iff g \circ \alpha \circ f^{-1} = h \tag{6}$$

$$\underbrace{\iff}_{g^{-1}\circ\ ,\ \circ f} g^{-1} \circ (g \circ \alpha \circ f^{-1}) \circ f = g^{-1} \circ h \circ f \tag{7}$$

$$\underbrace{\iff}_{\text{Asoc.}} \underbrace{(g^{-1} \circ g)}_{=id_B} \circ \alpha \circ \underbrace{(f^{-1} \circ f)}_{=id_A} = g^{-1} \circ h \circ f \tag{8}$$

$$\underbrace{\iff}_{\text{Prop. Identidad}} \alpha = g^{-1} \circ h \circ f \tag{9}$$

Así, tomando $\alpha = g^{-1} \circ h \circ f \in \mathcal{F}_{A,B}$ se tiene que $\varphi(\alpha) = h$, lo que prueba que φ es epiyectiva, y como ya vimos que era inyectiva, se concluye que es biyectiva.

- **Forma 2 (Teorema de la Inversa)**: Nos enfocaremos en encontrar de inmediato la inversa de φ (lo que prueba de paso que φ es biyectiva) despejando la variable independiente de la expresión de φ. Esto es, para $\alpha \in \mathcal{F}_{A,B}$ y $h \in \mathcal{F}_{C,D}$:

$$\underbrace{\varphi(\alpha)}_{=h} = g \circ \alpha \circ f^{-1} \quad \underbrace{\iff}_{\text{Análogo a Epiyectividad}} \quad \alpha = \underbrace{g^{-1} \circ h \circ f}_{=:\psi(h)}$$

Así, tenemos que la función de $\mathcal{F}_{C,D}$ en $\mathcal{F}_{A,B}$ definida por $\psi(h) = g^{-1} \circ h \circ f$, para $h \in \mathcal{F}_{C,D}$, es la propuesta de inversa de φ. Ahora, para concluir que ψ corresponde efectivamente a la inversa de φ, debemos comprobar que $\psi \circ \varphi = id_{\mathcal{F}_{A,B}}$ y que $\varphi \circ \psi = id_{\mathcal{F}_{C,D}}$ (igualdad de funciones). Notemos que los dominios y codominios respectivos claramente calzan (mismo análisis hecho al principio con los dominios y codominios de una composición). Ahora, falta var que las imágenes coinciden. Para ello, tomemos $\alpha \in \mathcal{F}_{A,B}$ arbitrario. Luego

$$(\psi \circ \varphi)(\alpha) = \psi(\varphi(\alpha)) = \psi(g \circ \alpha \circ f^{-1}) = g^{-1} \circ (g \circ \alpha \circ f^{-1}) \circ f \quad \underbrace{=}_{\text{Parte anterior}} \quad \alpha = id_{\mathcal{F}_{A,B}}(\alpha)$$

Esto prueba que $\psi \circ \varphi = id_{\mathcal{F}_{A,B}}$. La igualdad $\varphi \circ \psi = id_{\mathcal{F}_{C,D}}$ es análoga. Por lo tanto por el teorema de la inversa se concluye que φ es biyectiva y que $\psi = \varphi^{-1}$, probando lo pedido.

b) Sea $\alpha \in \mathcal{F}_{A,B}$ arbitrario. Probemos por doble implicancia que

$$\alpha \text{ es inyectiva (epiyectiva)} \iff \varphi(\alpha) \text{ es inyectiva (epiyectiva)}$$

($\Longrightarrow$) Supongamos que α es inyectiva y veamos que $\varphi(\alpha)$ también debe serlo. En efecto, como g y f^{-1} son biyectivas, en particular son inyectivas, luego $\varphi(\alpha) = g \circ \alpha \circ f^{-1}$ es una composición de funciones inyectivas, y por ende es inyectiva. Además, notemos que si α hubiese sido epiyectiva, entonces de manera análoga se concluye que $\varphi(\alpha)$ debe ser epiyectiva, al ser composición de funciones epiyectivas (pues g y f^{-1} lo son al ser biyectivas). Esto prueba la implicancia pedida.
($\Longleftarrow$) Supongamos que $\varphi(\alpha)$ es inyectiva y veamos que α también debe serlo. En efecto, de la misma forma que en las partes anteriores, podemos despejar α de la expresión de $\varphi(\alpha)$ y llegar a que $\alpha = g^{-1} \circ \varphi(\alpha) \circ f$ es una composición de funciones inyectivas (g y f^{-1} lo son al ser biyectivas), y por ende es inyectiva. Además, si $\varphi(\alpha)$ hubiese sido epiyectiva, tendríamos que α también debe serlo, al ser composición de funciones epiyectivas (g y f^{-1} lo son al ser biyectivas). Esto prueba la implicancia pedida.

P3) Completitud de funciones.

Sea $f(x) = \dfrac{|x|+1}{|x|-1}$

a) **Dominio**

$|x|-1 \neq 0$

Si $x > 0$	Si $x < 0$
$x - 1 \neq 0$	$-x - 1 \neq 0$
$x \neq 1$	$-1 \neq x$

Ceros

$Z(f) : \{ \forall x \in Dom(f) : f(x) = 0 \}$

$f(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{|x|+1}{|x|-1} = 0 \iff |x|+1 = 0$

$|x| = -1$

No tiene sol

$\forall x \in \mathbb{R} \, , \, |x| \geq 0$

$\Rightarrow Z(f) = \phi.$

Sea $f(x) = |x|$

se llaga el signo y $|x| = |-x|$

Paridad

$f(x) = f(-x)$ Par #

$f(-x) = \dfrac{|-x|+1}{|-x|-1} = \dfrac{|x|+1}{|x|-1} = f(x) \therefore$ Es Par

Scanned with CamScanner

$f(x) = -f(-x)$ Impar

$$-f(x) = -\left(\frac{|-x|+1}{|-x|-1}\right)$$

$$= -\left|\frac{|x|+1}{(|x|-1)}\right| \neq f(x)$$

$\therefore$ No es Impar

Periodiadad Esta función no posee periodiadad, pues no cumple

$$f(x+\lambda) = f(x) \quad , \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

b) Como la función es par podemos estudiar solo un intervalo, en este caso $\mathbb{R}^+$,

Si $x \in \mathbb{R}^+$

$$f(x) = \frac{|x|+1}{|x|-1} = \frac{x+1}{x-1}$$

Luego $f(x_2) - f(x_1)$, Sea $x_1 < x_2$

$$\frac{x_2+1}{x_2-1} - \frac{x_1+1}{x_1-1} = \frac{(x_2+1)(x_1-1) - (x_1+1)(x_2-1)}{(x_2-1)(x_1-1)} = \frac{\cancel{x_1x_2} - x_2 + x_1 - \cancel{1} - \cancel{x_1x_2} + \cancel{1} - x_2 + x_1}{(x_2-1)(x_1-1)}$$

$$= \frac{2(x_1-x_2)}{(x_2-1)(x_1-1)}$$

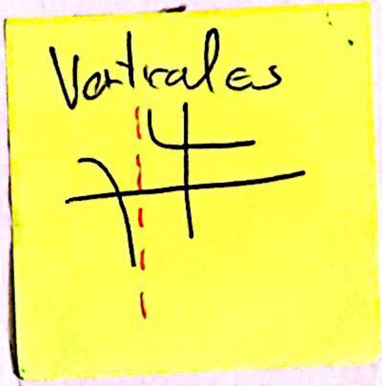
Si $x \in (0,1)$ Los signos de $f(x_2) - f(x_1) = \frac{2(\ominus)}{(\ominus)(\ominus)} = \frac{\ominus}{\oplus} = \ominus$

↓ decreciente

si $x \in (1, \infty)$ $f(x_2) - f(x_1) = \frac{2(\ominus)}{\oplus \oplus} = \frac{\ominus}{\oplus} = \ominus$

↓ decreciente.

Analizaremos los asintotas para tener completito en el gráfico



• verticales

Son las indeterminaciones

$x=-1,\ x=1$

horizontales

Escoando las variables se val al $\pm\infty$.

$$\frac{x+1}{x-1}\ \begin{matrix}\to \text{grado } 1\\ \to \text{grado } 1\end{matrix} \Rightarrow \frac{x+1}{x-1}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} \quad \text{si } x\to\infty$$

$$\frac{1+0}{1-0} = 1$$

$y=1$ | Asíntota. Luego es análogo para $-\infty$, pues es impar.

Con toda la información que tenemos vamos a graficar.

$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

$y = \frac{x+1}{x-1}$

$yx - y = x + 1$

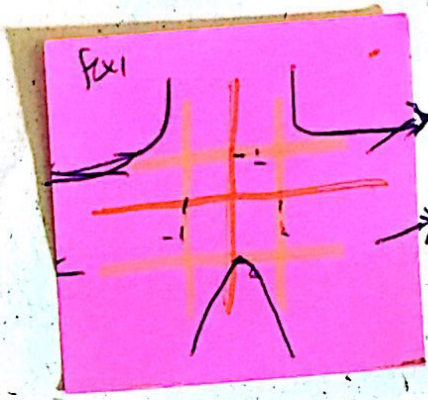
$yx - x = 1 + y$

$x(y-1) = 1+y$

$x = \frac{1+y}{-y+1}$

$\rightarrow$ $y \neq 1$

su recorrido $\mathbb{R} - \{1\}$ //



Si $x < 0$ $y = \frac{-x+1}{-x-1}$

$-yx - y = -x + 1$

$x(1-y) = 1 + y$

$x = \frac{1+y}{1-y}$

Bastaba estudiar 1 como par

P4) a, b $\in \mathbb{R}$ $f_{a,b}(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f_{a,b}(x) = ax + b$, $x \in \mathbb{R}$.

a) PDQ: $f_{1,b} \circ f_{a,0} = f_{(a,b)}$

$f_{1,b}(x) = x + b$ Calculemos

$f_{a,0}(x) = ax + 0 = ax$

Luego me piden componer $f_{1,b}(f_{a,0}(x))$

$(ax) + b = f_{1,b}(f_{a,0}(x)) = f_{a,b}$ ☐

b) Si $a \neq 0$. PDQ $f_{a,b}$ biyectiva y $f^{-1}_{a,b}$

$f(x) = f(y)$

$\cancel{a}x + \cancel{b} = \cancel{a}y + \cancel{b}$

$x = y$ $\therefore$ Inyectiva

$f_{a,b}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Luego $y = ax + b$

$\frac{y}{a} - \frac{b}{a} = x$ no se indetermina

$Rec = \mathbb{R} = C_0$

$\therefore$ sobre

Como es biyectiva puedo sacar inversa

$y = ax + b$

$\frac{y}{a} - \frac{b}{a} = x \to \frac{x}{a} - \frac{b}{a} = y = \underline{f^{-1}(x)}$ ||

c) Si $a \neq 0$, determine $p, q \in \mathbb{R}$

$f_{ab} \circ f_{pq} = f_{ba}$

$\left.\begin{array}{l} f_{ab} = ax + b \\ f_{pq} = px + b \end{array}\right\} f_{ab}(f_{pq}(x)) = a(px + q) + b = f_{ba} = bx + a$

$f_{ba} = bx + a$

$= apx + aq + b = bx + a$

$\Rightarrow ap = b \wedge aq + b = a \Leftrightarrow$

$\boxed{p = \frac{b}{a} \wedge q = \frac{a-b}{a} = 1 - \frac{b}{a}}$ //

Álgebra Lineal Otoño 2019.

Profesores: Daniel Remenik, N. Astromujoff y Alexander Frank

P. Auxiliares: F. Muñoz, N. Zalduendo y K. Pinochet

Ejercicio 2

Nombre:

Sección:

1. Sea $V = \mathbb{R}^{2,2}$

Sean $S = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2/3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 17/5 & 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$, y sea $W = \{A \in V / a_{11} + a_{2,2} = 0\}$

a) Demuestre que S es subespacio propio de V, es decir, que no es todo el espacio.

b) Demuestre que $W = S$

Terminamos !

walquier duda a mi correo

pyanez@dim.uchile.cl