

MA1001/MA1101- Secciones 1/9, Otoño 2022

Auxiliares: Javier Santidrián Salas - Patricio Yáñez Alarcón



TPCA 3

Fecha: 05/05/22

Álgebra

P1. Conjunto Imagen y Preimagen

Sea $f : A \rightarrow B$ una función. Un conjunto $C \subseteq A$ se dice *estable para f* si:

$$f^{-1}(f(C)) = C$$

- Muestre que si C y D son conjuntos estables para f , entonces $C \cup D$ también lo es.
- Pruebe que para todo $C \subseteq A$, el conjunto $D = f^{-1}(f(C))$ es estable para f .

P2. Relación de Orden

Sea $\mathcal{F} := \{f : \text{Dom}(f) \rightarrow \mathbb{N} \mid \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{N}, f \text{ es función}\}$. Se define la relación \mathcal{R} en \mathcal{F} tal que para cada $f, g \in \mathcal{F}$:

$$f\mathcal{R}g \iff \text{Dom}(f) \subseteq \text{Dom}(g) \wedge \forall x \in \text{Dom}(f), f(x) \mid g(x)$$

Demuestre que \mathcal{R} es una relación de orden y además que es un orden parcial.

P3. Relación de Equivalencia

Sea $f : A \rightarrow B$ una función y \mathcal{S} una relación de equivalencia en B . Se define la relación \mathcal{R} en A tal que para cada $a, b \in A$:

$$a\mathcal{R}b \iff f(a)\mathcal{S}f(b)$$

- Pruebe que \mathcal{R} es una relación de equivalencia.
- Muestre que $A/\mathcal{R} = \{f^{-1}([f(a)]_{\mathcal{S}}) : a \in A\}$.

Cálculo

P1. [Teorema de Stewart]

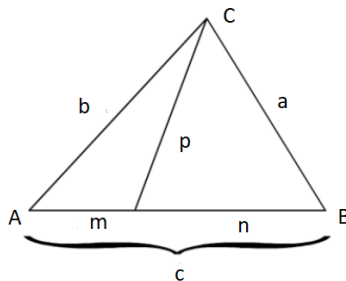
El teorema de Stewart permite determinar el valor de cualquier ceviana trazada desde uno de los vértices de un triángulo en función de los segmentos determinados por estos.

Demostrar que se cumple la siguiente ecuación:

$$c \cdot (mn + p^2) = a^2m + b^2n$$

Indicación: 0) Consideremos un triángulo ABC y un punto Q tal que pertenezca a la recta AB, en este caso CQ es una ceviana. En general se le dice ceviana al segmento que une un vértice con un punto de la recta opuesta a este.

- Llame Q al punto intersección de la ceviana con la recta AB.
- Defina un ángulo arbitrario y conveniente, tal que estos se relacionen directamente entre los triángulos formados y pruebe lo pedido.



P2. [CRMA1001-1-2011-2003][Ecuaciones Trigonómicas]

Encuentre todas las soluciones de la ecuación trigonométrica

a) $\cos^2(x) + \cos^2(2x) + \cos^2(3x) = \frac{3}{2}$

b) Resuelva para $a \in \mathbb{Z}$

$$\sqrt{2}\cos(x) = a$$

Hint: Le puede ser útil usar, sin necesidad de demostración.

$$\cos(\beta) + \cos(\gamma) = 2\cos\left(\frac{\beta + \gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta - \gamma}{2}\right)$$

P3. Resuelva las siguientes ecuaciones trigonométricas:

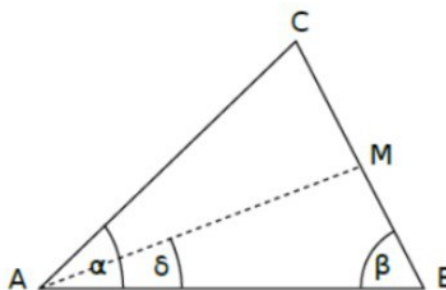
a) $\cos^3(x) + \sin^3(x) = 1 - \frac{\sin(2x)}{2}$

b) $\tan(x) \sin(4x) = 4(1 - 2\sin^2(x))$

c) $\cos^2(x) + \cos^2(2x) + \cos^2(3x) = 0$

P4. En el triángulo ABC de la figura, M es el punto medio del lado \overline{BC} . Demuestre que:

$$\cot(\delta) = 2 \cot(\alpha) + \cot(\beta)$$



Mucho éxito y toda la energía de sus Aux para ustedes