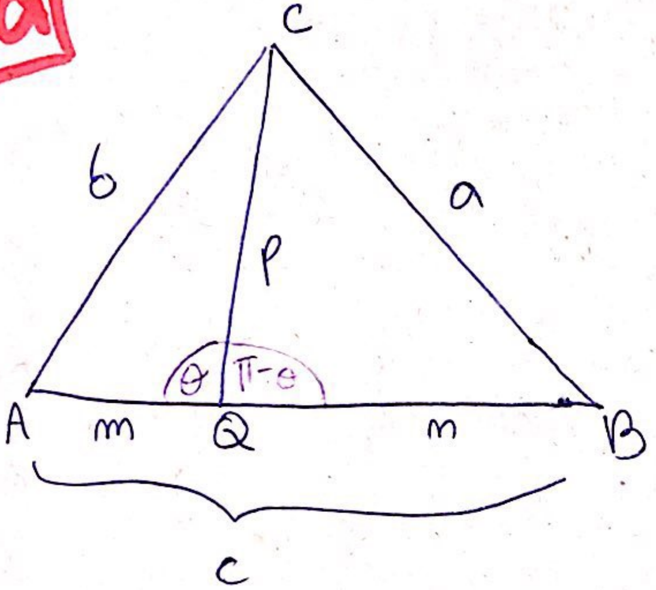
Pauta C.R 20 Mayo

P1| Teorema Stewart

P1.a)

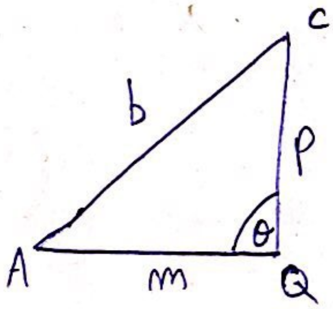


#basta definir $\measuredangle\ \theta$ y su suplemento $(180-\theta)$ $(\pi-\theta)$

PDQ

$$c(mn+p^2)=a^2m+b^2n$$

$\measuredangle$ tomando Δ AQC, luego ocupando Teorema del Coseno

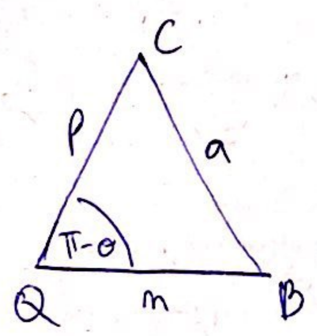


$$\Rightarrow b^2=m^2+p^2-2mp\cos\theta$$

despejando $\cos\theta$

$$\Rightarrow \boxed{\cos\theta=\frac{m^2+p^2-b^2}{2mp}}\ (1)\ \text{Ecuación}$$

$\measuredangle$ tomando Δ QBC, luego ocupando Teorema del Coseno



$$\Rightarrow a^2=p^2+n^2-2pn\cos(\pi-\theta)$$

Coseno de la suma

veamos que $\cos(\pi-\theta)=\cos(\pi)\cos(-\theta)-\cancel{\operatorname{sen}(\pi)}^{\,0}\operatorname{sen}(-\theta)$

- $\measuredangle$ conocidos $=\cos(-\theta)\cdot(-1)$
- paridad de $\cos(x)$ $=\cos(\theta)\cdot(-1)$

despejando $\cos\theta$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{a^2 - p^2 - n^2}{2np} \quad (2) \text{ Ecuación}$$

Juntando (1) y (2)

$$\frac{m^2 + p^2 - b^2}{\cancel{2}m\cancel{p}} = \frac{a^2 - p^2 - n^2}{\cancel{2}n\cancel{p}}$$

$$m^2 n + p^2 n - b^2 n = a^2 m - p^2 m - n^2 m$$

$$m^2 n + n^2 m + p^2 n + p^2 m = a^2 m + b^2 n$$ Es la parte derecha que quería formar.

$$mn(m+n) + p^2(m+n) = a^2 m + b^2 n$$

$$(m+n)(mn + p^2) = a^2 m + b^2 n$$

$$c(mn + p^2) = a^2 m + b^2 n. \quad \blacksquare$$

b) Encuentre todas las soluciones

b.1 de la ecuación trigonométrica

1) $\cos^2(x) + \cos^2(2x) + \cos^2(3x) = \frac{3}{2}$ } P:Pe

Primero veamos los Hint.

1) $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$

2) $\cos(\beta) + \cos(\delta) = 2\cos\left(\frac{\delta+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta-\delta}{2}\right)$

Usando 1) en P:Pe

$$\cos^2(x) + \cos^2(2x) + \cos^2(3x) = \frac{3}{2}$$

$$\frac{1+\cos(2x)}{2} + \frac{1+\cos(4x)}{2} + \frac{1+\cos 6x}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cancel{3} + \cos(2x) + \cos(4x) + \cos(6x) = \cancel{3}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\cos(2x)}_{\Delta} + \cos(4x) + \underbrace{\cos(6x)}_{\delta} = 0$$

Usando 2 en (Δ) y (δ)

$$\cos(4x) + 2\cos\left(\frac{2x+6x}{2}\right)\cos\left(\frac{2x-6x}{2}\right) = 0$$

$$\cos(4x) + 2\cos(4x)\cos(-2x) = 0$$ / Paridad cos(x)

$$\underbrace{\cos(4x)}_{1}\underbrace{\left[1 + 2\cos(2x)\right]}_{2} = 0$$

$\Rightarrow \cos(4x) = 0$; $\alpha = 4x$

$\Rightarrow \cos(\alpha) = 0$

$\Rightarrow \alpha = 2k_1\pi \pm \arccos(0)$, $k_1 \in \mathbb{Z}$

$\alpha = 2k_1\pi \pm \frac{\pi}{2}$, $k_1 \in \mathbb{Z}$

$\alpha = 4x = 2k_1\pi \pm \frac{\pi}{2}$, $k_1 \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x = \frac{k_1\pi}{2} \pm \frac{\pi}{8}$, $k_1 \in \mathbb{Z}$

1ra solución

Luego $1 + 2\cos(2x) = 0$

$\Leftrightarrow \cos(2x) = -\frac{1}{2}$, $\alpha' = 2x$

$\Rightarrow \alpha' = 2k_2\pi \pm \arccos(-\frac{1}{2})$, $k_2 \in \mathbb{Z}$

$\alpha' = 2k_2\pi \pm \frac{2\pi}{3}$, $k_2 \in \mathbb{Z}$

$\alpha' = 2x = 2k_2\pi \pm \frac{2\pi}{3}$, $k_2 \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x = k_2\pi \pm \frac{\pi}{3}$, $k_2 \in \mathbb{Z}$

2da solución.

1 $\cup$ 2 = Solución total.

b2 Resuelva para $a \in \mathbb{Z}$

b.2 $\sqrt{2}\cos(x) = a \Rightarrow \cos(x) = \frac{a}{\sqrt{2}}$

Sabemos $-1 \leq \cos(x) \leq 1$

$\Leftrightarrow -1 \leq \frac{a}{\sqrt{2}} \leq 1$

$\Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq a \leq \sqrt{2}$

Luego los únicos enteros entre estas cotas son $\{-1, 0, 1\}$, habrá que ver por casos.

a b c

a) $a = -1 \Rightarrow \cos(x) = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

$$\left.\begin{aligned} x &= 2k\pi \pm \arccos\left(\tfrac{-\sqrt{2}}{2}\right), \quad k \in \mathbb{Z} \\ &= 2k\pi \pm \tfrac{3\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}\right\} \text{solución } 1$$

b) $a = 0 \Rightarrow \cos(x) = 0$

$$\left.\begin{aligned} x &= 2\bar{k}\pi \pm \arccos(0), \quad \bar{k} \in \mathbb{Z} \\ &= 2\bar{k}\pi \pm \tfrac{\pi}{2}, \quad \bar{k} \in \mathbb{Z} \end{aligned}\right\} \text{solución } 2$$

c) $a = 1 \Rightarrow \cos(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\left.\begin{aligned} x &= 2\bar{\bar{k}}\pi \pm \arccos\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \bar{\bar{k}} \in \mathbb{Z} \\ &= 2\bar{\bar{k}}\pi \pm \pi/4, \quad \bar{\bar{k}} \in \mathbb{Z} \end{aligned}\right\} \text{solución } 3$$

Uniendo soluciones se tiene.

NOTAS: FECHA / / /

$\Leftrightarrow (x+a)^2 - y^2 = 2(x^2 - a^2)$

$\Leftrightarrow (x+a)^2 - y^2 = 2x^2 - 2a^2$

$\Leftrightarrow x^2 + 2ax + a^2 - y^2 = 2x^2 - 2a^2$

$\Leftrightarrow 2ax + 3a^2 - y^2 = x^2$

$\Leftrightarrow 3a^2 - y^2 = x^2 - 2ax$ $\quad / + a^2 - a^2$ (Sumar 0 para completar cuadrados)

$\Leftrightarrow 3a^2 - y^2 = (x^2 - 2ax + a^2) - a^2$

$\Leftrightarrow 4a^2 = (x-a)^2 + y^2$ } Circunferencia de radio $2a$ y centro $(a, 0)$

P3b a) $\cos^3(x) + \operatorname{sen}^3(x) = 1 - \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2}$

Usaremos 2 cosas:
- $(a^3 + b^3) = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
- $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)$

Entonces queda:

$$(\cos(x) + \operatorname{sen}(x))\,(\underbrace{\cos^2(x) - \cos(x)\operatorname{sen}(x) + \sin^2(x)}_{}) = 1 - \frac{\cancel{2}\operatorname{sen}(x)\cos(x)}{\cancel{2}}$$

$= 1$

$$\Leftrightarrow (\cos(x) + \operatorname{sen}(x))(1 - \cancel{\cos(x)\operatorname{sen}(x)}) = 1 - \cancel{\operatorname{sen}(x)\cos(x)}$$

Donde puedo cancelar sin miedo porque $\operatorname{sen}(x)\cdot\cos(x)$ NUNCA va a valer 1 ¿Por qué?

Si existiera x^* tal que $\cos(x^*)\operatorname{sen}(x^*) = 1$ entonces también cumple $2\cos(x^*)\operatorname{sen}(x^*) = 2 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(2x^*) = 2$
Y eso NUNCA pasa ($\operatorname{sen}(x) \leq 1 \;\forall x$!)
Entonces no hay nada malo en simplificar :)

NOTAS: FECHA / / /

Y queda: $\cos(x) + \operatorname{sen}(x) = 1$

Elevando al cuadrado a ambos lados:

$$\cancel{\cos^2(x)} + 2\cos(x)\operatorname{sen}(x) + \cancel{\operatorname{sen}^2(x)} = \cancel{1}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cos(x)\operatorname{sen}(x) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \operatorname{sen}(2x) = 0$$

$$\Rightarrow 2x = k\pi + (-1)^k \arcsin(0)$$

$$\Leftrightarrow 2x = k\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = k\frac{\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z}$$

b) $\tan(x)\operatorname{sen}(4x) = 4(1 - 2\operatorname{sen}^2(x))$

Aquí usaremos que:
- $\operatorname{sen}^2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$
- $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)$

$$\Rightarrow \quad \tan(x)\operatorname{sen}(4x) = 4\left(1 - \cancel{2}\cdot\frac{(1-\cos(2x))}{\cancel{2}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \tan(x)\cdot 2\operatorname{sen}(2x)\cos(2x) = 4\cdot\cos(2x)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cancel{\cos(x)}}\cdot \cancel{4}\operatorname{sen}(x)\cancel{\cos(x)}\cos(2x) = \cancel{4}\cos(2x)$$

⚠ Solo puedo hacerlo si $\cos(x) \neq 0$, o lo que es equivalente: $x \neq \frac{\pi}{2} \pm 2k\pi$ } excluir de solución

$$\Leftrightarrow \quad \operatorname{sen}^2(x)\cdot\cos(2x) - \cos(2x) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \cos(2x)(\operatorname{sen}^2(x) - 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \cos(2x)\cdot\cos^2(x) = 0$$

$\Rightarrow \quad \cos(2x) = 0 \;\vee\; \cos(x) = 0$ } pero ya descartamos que esto fuera posible!

$\Rightarrow \cos(2x) = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z}$

$(\Leftrightarrow) \quad x = k\pi \pm \frac{\pi}{4} \quad ; k \in \mathbb{Z}$

Excluyendo los x tales que $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$, pero pueden verificar que eso no pasa nunca! ˙◡˙

c) $\cos^2(x) + \cos^2(2x) + \cos^3(3x) = \frac{3}{2}$ → corrección enunciado original (arreglado en archivo)

Usaremos que: • $\cos^2(x) = \dfrac{1 + \cos(2x)}{2}$

• $\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

Entonces, con lo primero queda:

$$\frac{1+\cos(2x)}{\cancel{2}} + \frac{1+\cos(4x)}{\cancel{2}} + \frac{1+\cos(6x)}{\cancel{2}} = \frac{3}{\cancel{2}}$$

$(\Leftrightarrow) \quad \cancel{1} + \cos(2x) + \cancel{1} + \cos(4x) + \cos(6x) + \cancel{1} = \cancel{3}$

$(\Leftrightarrow) \quad \cos(2x) + \cos(4x) + \cos(6x)$

Ahora usando lo segundo: (con $\cos(2x)$ y $\cos(6x)$)

$$2\cos(4x)\cos(2x) + \cos(4x) = 0$$

$(\Leftrightarrow) \quad \cos(4x)\left[2\cos(2x) + 1\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \cos(4x) = 0 \\ \vee \\ 2\cos(2x) + 1 = 0 \end{cases}$

• $\cos(4x) = 0$

$\Rightarrow 4x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2} \quad (\Leftrightarrow) \quad x = k\frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{8}$

OBS: Creo que perdí soluciones; la real es $x = (2k+1)\frac{\pi}{8}$

• $2\cos(2x) + 1 = 0$

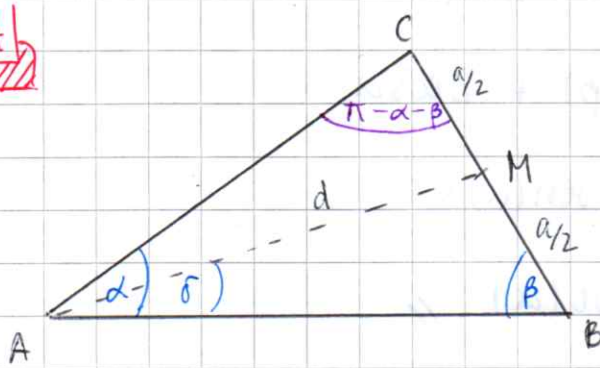
7|

NOTAS: FECHA / / /

$\Rightarrow \cos(2x) = \frac{-1}{2} \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \arccos\left(\frac{-1}{2}\right)$

$\Leftrightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

P4)



Llamemos "**a**" a la longitud CB

$\Rightarrow CM = MB = \frac{a}{2}$

Llamemos "d" a AM

Usando Teorema del Seno en ΔABM:

$$\frac{\operatorname{sen}\delta}{a/2} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{d}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{a/2} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\delta}$$

Aplicándolo denuevo en ΔAMC:

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha-\delta)}{a/2} = \frac{\operatorname{sen}(\pi-\alpha-\beta)}{d}$$

$\Rightarrow \frac{d}{a/2} = \frac{\operatorname{sen}(\pi-\alpha-\beta)}{\operatorname{sen}(\alpha-\delta)}$. Y ahora igualando los dos $\frac{d}{a/2}$:

$$\Rightarrow \frac{\operatorname{sen}(\pi-(\alpha+\beta))}{\operatorname{sen}(\alpha-\delta)} = \frac{\operatorname{sen}(\beta)}{\operatorname{sen}(\delta)}$$

Usando:
- $\operatorname{sen}(\pi-x) = \operatorname{sen}x$
- $\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen}x\cos y + \operatorname{sen}y\cos x$

$$\Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\operatorname{sen}(\alpha-\delta)} = \frac{\operatorname{sen}(\beta)}{\operatorname{sen}(\delta)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta)+\operatorname{sen}(\beta)\cos(\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\delta)-\operatorname{sen}(\delta)\cos(\alpha)} = \frac{\operatorname{sen}(\beta)}{\operatorname{sen}(\delta)}$$

torre

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) + \operatorname{sen}(\beta)\cos(\alpha)}{\operatorname{sen}(\beta)} = \frac{\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\delta) - \operatorname{sen}(\delta)\cos(\alpha)}{\operatorname{sen}(\delta)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \operatorname{sen}(\alpha)\cot(\beta) + \cos\alpha = \operatorname{sen}(\alpha)\cot(\delta) - \cos\alpha$$

$$\Leftrightarrow \quad \operatorname{sen}(\alpha)\cot(\delta) = \operatorname{sen}(\alpha)\cot(\beta) + 2\cos\alpha$$

Dividiendo a ambos lados por $\operatorname{sen}(\alpha)$:

$$\cot(\delta) = \cot(\beta) + 2\cot(\alpha) \quad //$$

P5| Por enunciado, A es no vacío y acotado superiormente $\Rightarrow$ Por axioma del Supremo $\exists \sup(A)$

Por otro lado, como A es no vacío, entonces $\exists a \in A$, y si lo multiplico por λ quedo con un $\lambda a \in \lambda A$ (por definición de λA) $\Rightarrow \lambda A$ es <u>no vacío</u>

Ahora, como $\sup(A)$ existe:

$$\begin{aligned} a &\leq \sup(A) \quad \forall a \in A \quad / \cdot \lambda \\ a\lambda &\leq \lambda \sup(A) \quad \forall a \in A \end{aligned}$$

$\Rightarrow \forall x \in \lambda A: \ x \leq \lambda \sup(A)$. Luego λA está acotado superiormente. $\therefore$ Por Ax del supremo, $\exists \sup(\lambda A)$.

Y como $\lambda \sup(A)$ es cota superior de λA:

$$\sup(\lambda A) \leq \lambda \sup(A)$$ (Por definición de supremo)

Hay que ver la otra desigualdad

En efecto: $\forall x \in \lambda A: \ x \leq \sup(\lambda A)$

$\Rightarrow \forall a \in A: \ \lambda a \leq \sup(\lambda A)$

$\Rightarrow \forall a \in A: \ a \leq \dfrac{\sup(\lambda A)}{\lambda}$

Terminamos !

Cualquier duda a mi correo

pyanez@dim.uchile.cl

P1) $f: A \to B$ función.

$C \subseteq A$ estable para f si $f^{-1}(f(C)) = C$

Obs · Si $D \subseteq A$: $f(D) := \{f(x) : x \in D\} = \{y \in B : \exists x \in D,\ f(x) = y\}$

· Si $D \subseteq B$: $f^{-1}(D) := \{x \in A : f(x) \in D\}$

· Si $D \subseteq A$: $D \subseteq f^{-1}(f(D))$

(pues $x \in D \underset{\text{(def. imagen)}}{\Rightarrow} f(x) \in f(D) \underset{\text{(def. preimagen)}}{\Rightarrow} x \in f^{-1}(f(D))$)

a) C, D conj. estables para f.

PDQ $C \cup D$ es conj. estable para f.

($\Leftrightarrow C \cup D = f^{-1}(f(C \cup D))$)

En efecto:

$$f^{-1}(f(C \cup D)) \underset{\substack{\text{imagen de } \cup \\ \text{es la } \cup \text{ de las imagenes}}}{=} f^{-1}(f(C) \cup f(D))$$

$$\underset{\substack{\text{preimagen de } \cup \\ \text{es la } \cup \text{ de las preimagenes}}}{=} f^{-1}(f(C)) \cup f^{-1}(f(D))$$

$$\underset{C \text{ y } D \text{ estables}}{=} C \cup D \blacksquare$$

b) Sea $C \subseteq A$ arbitrario.

PDQ $D = f^{-1}(f(C))$ es estable para f.

($\Leftrightarrow D = f^{-1}(f(D))$)

En efecto, sabemos que $D \subseteq f^{-1}(f(D))$ siempre se tiene. Falta ver que $f^{-1}(f(D)) \subseteq D$. Sea $x \in f^{-1}(f(D))$ arbitrario.

$\underset{\text{(def. preimagen)}}{\Rightarrow} f(x) \in f(D)$ ($\not\Rightarrow x \in D$, pues f no necesariamente es inyectiva)

$\underset{\text{(def. imagen)}}{\Rightarrow} \exists\, \underbrace{t \in D = f^{-1}(f(C))}_{\Rightarrow f(t) \in f(C) \text{ (def. preimagen)}}$ tq $f(x) = f(t)$

$\Rightarrow f(x) \in f(C)$

$\underset{\text{def. preimagen}}{\Rightarrow} x \in f^{-1}(f(C)) = D$

$\therefore D = f^{-1}(f(C))$ es estable para f $\blacksquare$

P2 $\mathcal{F} = \{ f : Dom(f) \to \mathbb{N} \mid Dom(f) \subseteq \mathbb{N},\ f \text{ es función} \}$

Para $f, g \in \mathcal{F}$:

$$f \,R\, g \iff Dom(f) \subseteq Dom(g) \wedge \forall x \in Dom(f),\ f(x) \mid g(x)$$

PDQ R es relación de orden y que es un orden parcial.

Sol:

· Refleja: Sea $f \in \mathcal{F}$ arbitraria.

PDQ $f R f$

En efecto:

· $Dom(f) \subseteq Dom(f)$ ✓

· Sea $x \in Dom(f)$ arbitrario. Luego:
$f(x) = f(x) \cdot 1$, por lo tanto $f(x) \mid f(x)$ ✓

$\therefore f R f$.

· Antisimétrica: Sean $f, g \in \mathcal{F}$ arbitrarias tq $f R g \wedge g R f$. PDQ $f = g$ $\left(\iff \begin{array}{l} Dom(f) = Dom(g) \\ cod(f) = cod(g) \\ \forall x \in Dom(f) : f(x) = g(x) \end{array} \right)$

En efecto, como $f R g \wedge g R f$, esto nos dice que $Dom(f) \subseteq Dom(g) \wedge Dom(g) \subseteq Dom(f)$ ie $Dom(f) = Dom(g)$.

Es claro de la def. de $\mathcal{F}$ que $cod(f) = cod(g) = \mathbb{N}$.

Por último, sea $x \in Dom(f)$ arbitrario. Probemos que $f(x) = g(x)$. Como $f R g$, entonces $f(x) \mid g(x)$, ie $\exists k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tq $g(x) = f(x) \cdot k$. Como $g R f$, entonces $g(x) \mid f(x)$, ie $\exists l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tq $f(x) = g(x) \cdot l$

Luego:

$$f(x) = g(x) \cdot l = f(x) \cdot k \cdot l$$

$$\Rightarrow f(x)(kl - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{f(x) = 0} \vee kl - 1 = 0$$

※ pues $f(x) \mid g(x)$

$$\Rightarrow kl = 1$$

$$\Rightarrow k = l = 1$$

$k, l \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow g(x) = f(x) \cdot k = f(x) \cdot 1 = f(x)$$

$$\Rightarrow f(x) = g(x) \checkmark$$

$\therefore f = g$.

· Transitividad: Sean $f, g, h \in \mathcal{F}$ arbitrarias tq $f R g \wedge g R h$.

PDQ $f R h$ $\left(\iff \begin{array}{l} \cdot\ Dom(f) \subseteq Dom(h) \\ \cdot\ \forall x \in Dom(f),\ f(x) \mid h(x) \end{array} \right)$

En efecto, como $f R g \wedge g R h$, entonces $Dom(f) \subseteq Dom(g) \wedge Dom(g) \subseteq Dom(h)$, con lo cual $Dom(f) \subseteq Dom(h)$.

Ahora, sea $x \in Dom(f)$ arbitrario. Probemos que $f(x) \mid h(x)$.

Como $f R g$, $f(x) \mid g(x)$, ie $\exists k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tq $g(x) = f(x) \cdot k$. Como $g R h$ y $x \in Dom(g)$ (pues $Dom(f) \subseteq Dom(g)$), entonces $g(x) \mid h(x)$, ie $\exists l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tq $h(x) = g(x) \cdot l$.

Por lo tanto:

$$h(x) = g(x) \cdot l = f(x) \cdot \underbrace{(k \cdot l)}_{\in \mathbb{N}}$$

$$\Rightarrow f(x) \mid h(x) \checkmark$$

$\therefore f R h$.

Así, R es relación de orden.

Para ver que es orden parcial, explicitemos 2 funciones f y g en $\mathcal{F}$ que no sean comparables por R. Un ejemplo:

· $f : \{0\} \to \mathbb{N}$, $x \mapsto x$

· $g : \{1\} \to \mathbb{N}$, $x \mapsto x$

$Dom(f) = \{0\} \not\subseteq \{1\} = Dom(g) \Rightarrow f \not R g$

$Dom(g) = \{1\} \not\subseteq \{0\} = Dom(f) \Rightarrow g \not R f$.

MA1101-1 Introducción al Álgebra, Otoño 2022
Profesora: Paulina Cecchi B.
Auxiliar: Javier Santidrián Salas

Pauta TPCA 3

P3. Relaciones de Equivalencia

Sea $f : A \to B$ una función y $\mathcal{S}$ una relación de equivalencia en B. Se define la relación $\mathcal{R}$ en A tal que para cada $a, b \in A$:

$$a\mathcal{R}b \iff f(a)\mathcal{S}f(b)$$

a) Pruebe que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

Solución: Hay que ver que $\mathcal{R}$ es refleja, simétrica y transitiva.
- Refleja: Sea $a \in A$ arbitrario. Veamos que $a\mathcal{R}a$. En efecto, como $\mathcal{S}$ es refleja (al ser de equivalencia), $f(a)\mathcal{S}f(a)$, lo cual nos dice que $a\mathcal{R}a$.
- Simétrica: Sean $a, b \in A$ arbitrarios tal que $a\mathcal{R}b$. Veamos que $b\mathcal{R}a$. En efecto, por hipótesis $f(a)\mathcal{S}f(b)$, y como $\mathcal{S}$ es simétrica (al ser de equivalencia), $f(b)\mathcal{S}f(a)$, es decir $b\mathcal{R}a$.
- Transitiva: Sean $a, b, c \in A$ arbitrarios tal que $a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c$. Veamos que $a\mathcal{R}c$. En efecto, por hipótesis $f(a)\mathcal{S}f(b) \wedge f(b)\mathcal{S}f(c)$, y como $\mathcal{S}$ es transitiva (al ser de equivalencia), $f(a)\mathcal{S}f(c)$, esto es $a\mathcal{R}c$.
Por lo tanto $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia.

b) Muestre que $A/\mathcal{R} = \{f^{-1}([f(a)]_{\mathcal{S}}) : a \in A\}$.

Solución: Sabemos que el conjunto cuociente está dado por

$$A/\mathcal{R} = \{[a]_{\mathcal{R}} : a \in A\}$$

donde para cada $a \in A$,

$$[a]_{\mathcal{R}} = \{b \in A : a\mathcal{R}b\}$$

Así, basta ver que $\forall a \in A$, $[a]_{\mathcal{R}} = f^{-1}([f(a)]_{\mathcal{S}})$ (igualdad de conjuntos) para concluir lo pedido. En efecto, sea $a \in A$ arbitrario (fijamos una clase de equivalencia a estudiar) y sea $b \in [a]_{\mathcal{R}}$ arbitrario (estudiamos un elemento arbitrario de la clase que la caracterizará).

$$\underbrace{\iff}_{\text{def. de clase}} \quad a\mathcal{R}b \tag{1}$$

$$\underbrace{\iff}_{\text{def. de } \mathcal{R}} \quad f(a)\mathcal{S}f(b) \tag{2}$$

$$\underbrace{\iff}_{\text{def. de clase}} \quad f(b) \in [f(a)]_{\mathcal{S}} \tag{3}$$

$$\underbrace{\iff}_{\text{def. de preimagen}} \quad b \in f^{-1}([f(a)]_{\mathcal{S}}) \tag{4}$$

Como $b \in [a]_{\mathcal{R}}$ era arbitrario, esto nos dice por definición de igualdad de conjuntos que $[a]_{\mathcal{R}} = f^{-1}([f(a)]_{\mathcal{S}})$, y esto $\forall a \in A$ (pues el $a \in A$ que tomamos era arbitrario), lo que prueba que $A/\mathcal{R} = \{f^{-1}([f(a)]_{\mathcal{S}}) : a \in A\}$.