

MA1001-9 Introducción al Cálculo

Profesor: Leonardo Sánchez C.

Creadores: Patricio Yáñez and Javier Santidrián



Auxiliar: PatoAux &amp; JaviAux

Consultas: pyanez@dim.uchile.cl

## Día del Sándwich Oficial V3.0 2022 Guarden sus Sucesiones en el Corazón

Viernes de Sándwich 2022

**P1.** [Calcular Límites]/[Sándwich desde directo del fondo del mar: Una Cangreburger] Calcular los siguientes límites

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + n} - n$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+n}\right)^2$

c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2} - \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{k(k+2)}\right)$

d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n}$

e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 1}{n^2 \cdot 3^{n+1}}$

f)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n-1}{2n+4}\right)^n$

g)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2^n + 1}{n^2 \cdot 3^{n+1}}}$

h)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n + b^n}{a^{n+1} + b^{n+1}}, a \neq b$

i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n}, a, b > 0$

j)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^3 + 100n^2 + 3}$

k)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1}$



**P2.** [Orégano Parmesano: Más Cálculos de Límites]

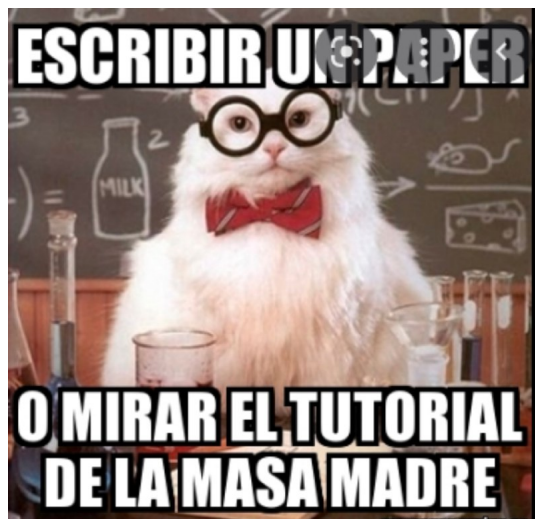
Calcular, si es que existen, los límites de las siguientes sucesiones definidas por su término general:

a)  $a_n = \frac{1}{n} \ln(1 + e^n + e^{2n} + e^{3n})$

b)  $b_n = \left(\frac{n+2}{2n}\right)^n$ ;  $c_n = \sqrt[n]{\frac{n+2}{2n}}$

c)  $d_n = \frac{a^n + b}{a^n - b}$  en los casos  $a \in (0,1)$  y  $a > 1$ .

d)  $e_n = \sum_{k=1}^n \frac{nk}{n^3 + k}$



**P3. [Sándwich de Whooper]**

Usando que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$  para todo  $a > 0$  y el Teorema del Sándwich, calcule:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{7^n + 5^n + 3^n}$$

**P4. [Sándwich de Completo Vegano weno pal alma y Ñuñoa y Talca] Convergencia de Sucesión**

Pruebe que la siguiente sucesión es convergente:

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$$



**P5. [Sándwich del Subway, el del día no más para que sea más barateli][Sucesión y función]**

Sea  $(x_n)$  una sucesión convergente a  $l \in \mathbb{R}$ , y sea  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  una función estrictamente creciente.

a) Pruebe que la sucesión  $(x_{f(n)})$  es convergente a  $l$ .

b) Calcule  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 + 2}{n^2 + 1} \right)^{n^2}$

**P6. [pan con huevito y palta (aguacate el kilo a 9000 mi ciela)][Función/PROPUESTO]**

Una función real  $f$  se dice continua en  $x_0 \in \text{Dom}(f)$  si toda sucesión  $(x_n)$  tal que  $x_n \rightarrow x_0$  y que  $x_n \in \text{Dom}(f), \forall n \in \mathbb{N}$  entonces la sucesión  $(f(x_n))$  tiene límite y  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ , y diremos que es continua (a secas) si  $f$  es continua en todo su dominio.

a) Pruebe que la función  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x}$  es continua.

1) Pruebe que es continua en  $x_0 = 0$

2) Pruebe que si  $x_0 > 0$  y  $x_n \rightarrow x_0$ , entonces existe  $M > 0$  y existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $(\forall n \geq n_0), \sqrt{x_n} > M$

3) Usando lo anterior pruebe que  $\sqrt{x_n} - \sqrt{x_0} \rightarrow 0$

b) Calcule  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n - \sqrt{n}}$

**Notitas:**

1. P1) Esta pregunta busca que comprendan la definición de convergencia, para esto es recomendable tener la definición y desglosar cada conectivo lógico o cuantificador y ver que hace para el conjunto dado, estudien los casos  $\frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$

2. P2) Esta pregunta busca que a través de maniobras convenientes y de equivalencias lleguen a expresiones que sean más fáciles de trabajar.

Unos ejemplos clásicos de esto es multiplicar por un 1 conveniente, bajo el argumento de  $a_n = a_n \cdot 1$ , usualmente se usa esto cuando tengo expresiones racionales con algún grado de polinomio en numerador y denominador, distintos o iguales.

También cuando hay expresiones que son diferencias de expresiones poco trabajables como  $\sqrt{a} - \sqrt{b} =$

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \cdot 1 = (\sqrt{a} - \sqrt{b}) \cdot \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

*Observación:* Esto también se puede hacer para cualquier diferencia de polinomios de igual grado, propuesto!!

*“Nunca es demasiado tarde para nada. Como para salvar el semestre :D”  
El Coronel no tiene quien le escriba-Gabriel Patricio García Márquez Yáñez*

**Referencia del día:**

-A pato el pez un sandwich de mermelada-

-Pato es un pez?-

-Y hoy no hay mermelada, y entonces mi hermana me dijo que le diera un sandwich de atún, no le puedo dar a pato atún.. Tu sabes lo que es atún?-

-Pez?-

-ES PEZ SI PATO COMO PEZ SERÍA UNA ABOMINACIÓN!!!!. Llegue tarde por ir a la tienda, por mermelada, porque solo había ese, ese tonto atún!-

-Lilo, Lilo, por que es tan importante?-

-Pato controla el clima- “ -Es día de sandiwch, cada jueves le doy

-A pato el pez un sandwich de mermelada-

-Pato es un pez?-

-Y hoy no hay mermelada, y entonces mi hermana me dijo que le diera un sandwich de atún, no le puedo dar a pato atún.. Tu sabes lo que es atún?-

-Pez?-

-ES PEZ SI PATO COMO PEZ SERÍA UNA ABOMINACIÓN!!!!. Llegue tarde por ir a la tienda, por mermelada, porque solo había ese, ese tonto atún!-

-Lilo, Lilo, por que es tan importante?-

-Pato controla el clima-