Parte 2

el regreso

i) $\lim \frac{1}{n} \ln(e^{n} + e^{2n} + e^{3n} + 1)$ ln creciente

$$\frac{1}{n}\ln(e^{3n}) \leq \frac{1}{n}\ln(\underset{\leq e^{3n}}{e^{n}} + \underset{\leq e^{3n}}{e^{2n}} + e^{3n} + \underset{\leq e^{3n}}{1}) \leq \frac{1}{n}\ln(4\cdot e^{3n})$$

$$\frac{3\cancel{n}}{\cancel{n}} \leq \frac{1}{n}\ln(e^{n}+e^{2n}+e^{3n}+1) \leq \frac{1}{n}\ln(4) + \frac{3\cancel{n}}{\cancel{n}}$$

$$3 \leq \qquad\qquad \leq \frac{1}{n}\ln(4) + 3$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$3 \qquad 3 \qquad 3$$

ii) $X_n = \left(\frac{n+2}{2n}\right)^{n} = \left(\frac{\cancel{n}}{2\cancel{n}} + \frac{2}{2n}\right)^{n} = \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)}_{q_n}{}^{n}$

$$\lim_{n\to\infty} q_n \; \frac{1}{2}+\frac{1}{n} = \frac{1}{2} < 1$$

$|q_n| < 1 \Rightarrow q_n^{\,n} \to 0$, $X_n \to 0$ //

iii) $y_n = \sqrt[n]{\frac{n+2}{2n}}$

$= \left(\frac{\cancel{n}}{2\cancel{n}} + \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}n}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$

$\sqrt[n]{a_n}$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{n} \to \frac{1}{2} > 0$

$\sqrt[n]{a_n} \to 1$, $y_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \to 1$ //

iv) $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n + b}{a^n - n} \cdot 1$, si $a \in (0,1)$, $\frac{a^n}{n} = \overset{0}{\cancel{a^n}} \cdot \overset{0}{\cancel{\frac{1}{n}}}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{(a^n + b) \cdot \frac{1}{n}}{(a^n - n) \cdot \frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\overset{0}{\cancel{\frac{a^n}{n}}} + \overset{0}{\cancel{\frac{b}{n}}}}{\overset{0}{\cancel{\frac{a^n}{n}}} - 1} = \frac{0}{-1} = 0$ //

Siguiente caso $a > 1 \iff 1 > \frac{1}{a}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{(a^n + b)}{(a^n - n)} \cdot \frac{\frac{1}{a^n}}{\frac{1}{a^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{b}{a^n}}{1 - \frac{n}{a^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \overset{0}{\cancel{\left(\frac{1}{a}\right)^n}} \cdot b}{1 - \overset{0}{\cancel{\left(\frac{1}{a}\right)^n}} \cdot n}$

$= \frac{1}{1} = 1$ //

Demuestre usando convergencia

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n-(-1)^n} = 0$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 \left| \frac{1}{n-(-1)^n} - 0 \right| \leq \varepsilon$

SPG $\quad n = 2k \,, \quad k \in \mathbb{N}$

$$0 < \frac{1}{n-(-1)^n} = \frac{1}{n-(-1)^{2k}} = \frac{1}{n-1}$$

Si n es IMPAR., $n = 2k-1 \,, \quad k \in \mathbb{N}$

$$0 < \frac{1}{n-(-1)^n} = \frac{1}{n-(-1)^{2k-1}} = \frac{1}{n+1}$$

$$\left| \frac{1}{n-(-1)^n} - 0 \right| = \left| \frac{1}{n-(-1)^n} \right|$$

1) Si fuera par $\left| \frac{1}{n-1} \right| \geq 0 \,, \quad \forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$, $n \geq 1$

$$\left| \frac{1}{n-(-1)^n} \right| = \frac{1}{n-1} < \varepsilon \iff 1 < \varepsilon n - \varepsilon = \varepsilon(n-1)$$

$$\iff \frac{1}{\varepsilon} < n-1$$

$\iff \frac{1}{\varepsilon} + 1 < n \,, \quad n_0 := \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} + 1 \right\rfloor + 1 \,, \quad \forall n \geq n_0 \left| \frac{1}{n-(-1)^n} - 0 \right| \leq \varepsilon$ //

$$\frac{1}{n-(-1)^n} = \frac{1}{n+1} > 0$$

$$\left| \frac{1}{n-(-1)^n} - 0 \right| = \left| \frac{1}{n+1} - 0 \right|$$

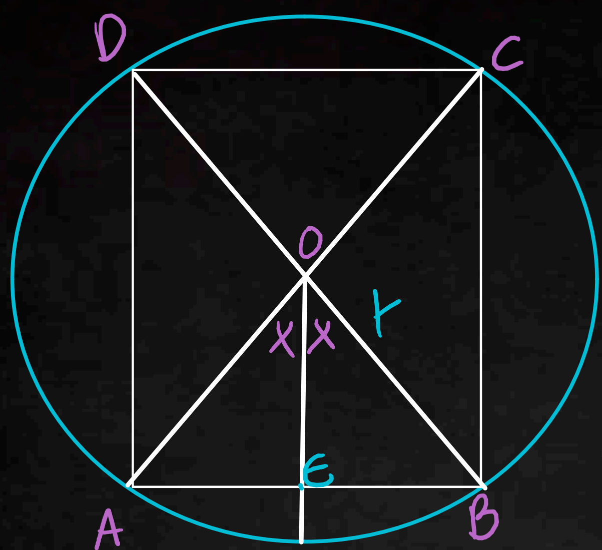
$$= \frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

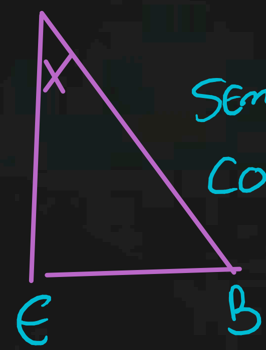
$$1 < \varepsilon(n+1) \to \frac{1}{\varepsilon} - 1 < n \;, \quad \bar{n}_0 = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right\rfloor + 1$$

luego $\forall n \geq \bar{n}_0$, $\frac{1}{n-(-1)^n} \to 0$

tomaré $\quad \bar{\bar{n}}_0 = \max\{n_0, \bar{n}_0\}$

$$x_1, x_2, \ldots \ldots x_{n_0} \ldots \ldots x_{\bar{n}_0} \ldots \ldots x_n$$





$$\operatorname{sen}(x) = \frac{\overline{EB}}{r}$$

$$\operatorname{sen}(x)\cdot r = \overline{EB}$$

$$\cos(x)\, r = \overline{EO}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{A \triangleleft AOB(x)}{A \square ABCD(x)}$$

$$\frac{1}{2}\theta r^2$$

$$A \triangleleft AOB(x) = \frac{1}{2} 2x (r)^2$$

$$A \square ABCD(x) = \overline{AB}\cdot\overline{BC}$$
$$= 2\overline{EB}\cdot 2\overline{EO}$$
$$= 4\operatorname{sen}(x)\cos(x) r^2$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{A \triangleleft}{A \square} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cancel{2}}(\cancel{2}x)\cancel{r^2}}{4\operatorname{sen}(x)\cos(x)\cancel{r^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}}\cdot\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{1} = \frac{1}{4}$$

Alg de límites, límite producto es → producto de límites si existen, y los límites vistos son conocidos

$$\lim_{x\to 5} \frac{x^2+2}{\cos(\pi x)} = \frac{25+7}{\cancel{\cos(5\pi)}\,-1} = -27$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x-\sqrt{x+2}}{x-2}, \quad \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x-\sqrt{x+2})(x+\sqrt{x+2})}{(x-2)(x+\sqrt{x+2})} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-x-2}{(x-2)(x+\sqrt{x+2})}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+1)}{\cancel{(x-2)}(x+\sqrt{x+2})} = \lim_{n\to 2} \frac{x+1}{x+\sqrt{x+2}} = \frac{3}{2+2} = \frac{3}{4}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)-x}{x^k}, \quad k \in \{1, 2\}$$

$k = 1$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)-x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} - 1 = 1 - 1 = 0$$

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

$K=2$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)-x}{x^2}$$

$$\operatorname{sen}(x)\cos(x) \le x \le \operatorname{tg}(x) \quad /\cdot -1$$

$$-\operatorname{tg}(x) \le -x \le -\operatorname{sen}(x)\cos(x) \quad /+\operatorname{sen}(x)$$

$$\operatorname{sen}(x)-\operatorname{tg}(x) \le \operatorname{sen}(x)-x \le \operatorname{sen}(x)-\operatorname{sen}(x)\cos(x) \quad /\cdot\frac{1}{x^2}$$

$$\frac{\operatorname{sen}(x)-\operatorname{tg}(x)}{x^2} \le \frac{\operatorname{sen}(x)-x}{x^2} \le \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^2} - \frac{\operatorname{sen}(x)\cos(x)}{x^2}$$

$$\frac{\operatorname{sen}(x)\left[1-\frac{1}{\cos(x)}\right]}{x^2} \le \frac{\operatorname{sen}(x)-x}{x^2} \le \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\frac{\left[1-\cos(x)\right]}{x}$$

$$\frac{\operatorname{sen}(x)}{x^2}\left[\frac{\cos(x)-1}{\cos(x)}\right] \le \frac{\operatorname{sen}(x)-x}{x^2} \le \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\frac{\left[1-\cos(x)\right]}{x}$$

$$\underset{\downarrow\, 1}{\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}}(-1)\underset{\downarrow}{\frac{(1-\cos(x))}{x}}\cdot\frac{1}{\cos(x)} \le \frac{\operatorname{sen}(x)-x}{x^2} \le \overset{1}{\cancel{\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}}}\overset{0}{\cancel{\frac{(1-\cos(x))}{x}}}$$

$$1\cdot(-1)\cdot 0\cdot\frac{1}{1} \le \downarrow \le 1\cdot 0$$

$$0 \quad //$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{x^2}}{x - x^2} = \lim_{x\to 0} e^{x^2} \frac{\left[e^{x-x^2} - 1\right]}{x - x^2}$$

$$\mu = x - x^2, \quad x \to 0, \quad \mu \to 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x-x^2} - 1}{x - x^2} = \lim_{\mu\to 0} \frac{e^\mu - 1}{\mu}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{x^2}}{x - x^2} = e^{0^2} \cdot 1 = 1$$

$$\lim_{x\to 1} (1-x)\, tg\left(\frac{\pi}{2}x\right) = \lim_{x\to 1} \frac{(1-x)\, sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$$

$w = 1 - x$

$$x \to 1 \Rightarrow w \to 0 \qquad \frac{\pi}{2}x = \frac{\pi}{2}(1 - w)$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-x}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)} = \lim_{w\to 0} \frac{w}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - w\frac{\pi}{2}\right)}$$

cos es seno bajo una traslación

$$= \lim_{w\to 0} \frac{w\frac{\pi}{2}}{sen\left(\frac{\pi}{2}w\right)} \cdot \frac{1}{\frac{\pi}{2}} \qquad V = \frac{\pi}{2}w$$

$$= \lim_{w\to 0} \frac{1}{\frac{sen\left(\frac{\pi}{2}w\right)}{\frac{\pi}{2}w}} \cdot \frac{1}{\frac{\pi}{2}} \to 1 \cdot \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

Cambio de variable no dejo 2 variables dando vuelta,

Cosa fea en exponente $x^{\alpha} = e^{\ln(x^{\alpha})}$

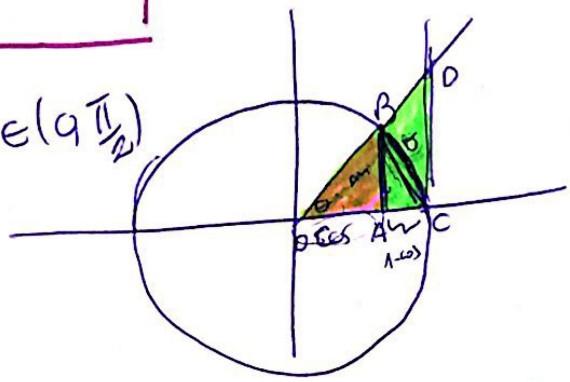
$= e^{\alpha \ln(x)}$

$\lim e^{f(x)} = e^{\lim f(x)}$

Demostremos por Teorema del Sándwich límite fundamental del sen(x)!!

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1}$$

Sea $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$



Veamos una visión geométrica

$\acute{A}\triangle OAB \leq \acute{A} \triangleleft OCB \leq \acute{A}\triangle OCD$ | $\acute{A}$(Algo) = Área algo

- La desigualdad no cambia, $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \operatorname{sen}(\theta) > 0$

$$\frac{\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)}{2} \leq \frac{\theta}{2} \leq \frac{\operatorname{tg}(x)}{2} \quad / \cdot 2 \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}(\theta)}, \quad \operatorname{sen}\theta \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(\theta) \leq \frac{\theta}{\operatorname{sen}\theta} \leq \frac{1}{\cos\theta} \quad /(\,)^{-1}, \quad \operatorname{sen}(\theta), \cos(\theta) > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cos\theta} \geq \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} \geq \cos\theta \quad / \text{ Aplicando límite } \theta \to 0$$

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{1}{\cos\theta} \geq \lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} \geq \lim_{\theta \to 0} \cos\theta$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$1 \qquad\qquad 1$$

$\Rightarrow$ Por TEOREMA Sándwich $\lim_{\theta \to 0^+} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1.$

$f(x) = -f(-x)$

Pero sabemos que $\operatorname{sen}\theta$ es Impar, en conjunto a θ, entonces $f(\theta) = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = \dfrac{-\operatorname{sen}(-\theta)}{-(-\theta)} = \dfrac{\operatorname{sen}(-\theta)}{-\theta} = f(-\theta)$

$\Rightarrow \dfrac{\operatorname{sen}(\theta)}{\theta} = f(\theta)$ es par, simétrica

$\Rightarrow \lim\limits_{\theta \to 0} f(\theta) = \lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = \lim\limits_{\theta \to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = \lim\limits_{\theta \to 0^-} \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1$ $\boxed{//}$

1) Evaluar y ver si es indeterminación
2) Álgebra límites y con conocidos llegar al límite

P1) a) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2+2}{\cos(\pi x)}$ lo primero que debemos hacer, es evaluar, pues

en este caso por alg. de límites, no hay indeterminación

1) no ocurre por lo que solo reemplazo

$= \dfrac{5^2+2}{\cos(5\pi)} = \dfrac{27}{-1} = -27$

b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - \sqrt{x+2}}{x-2}$, si evalúo

1) es $\dfrac{0}{0}$

Scanned with CamScanner

$$\lim_{x\to 2} \frac{x-\sqrt{x+2}}{x-2} \cdot \underbrace{\frac{(x+\sqrt{x+2})}{(x+\sqrt{x+2})}}_{1}$$

2)

$$= \lim_{x\to 2} \frac{x^2 - x - 2}{(x-2)(x+\sqrt{x+2})}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+1)}{\cancel{(x-2)}(x+\sqrt{x+2})} \quad , x \neq 2 \rightarrow \text{condiciono } x \neq 2$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{x+1}{x+\sqrt{x+2}} = \frac{3}{2+\sqrt{4}} = \frac{3}{4} \,//$$

} realizo el límite $\rightarrow 2$.

c) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - x}{x^k} \quad , k \in \{1, 2\}$

$\underline{k=1}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} - 1$$

/ límite conocido Pag 199 Apunte

$$= 1 - 1 = 0 \,//$$

$k=2$

$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - x}{x^2}$. Lo haremos por teo sandwich.

Scanned with CamScanner

Por introducción pag 11, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$\bar{x} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

de  $\operatorname{sen}(x)\cos(x) \le x \le \operatorname{tg}(x)$ $\quad / \cdot(-1)$

$\Leftrightarrow \quad -\operatorname{tg}(x) \le -x \le -\operatorname{sen}(x)\cos(x)$ $\quad / + \operatorname{sen}(x)$

$\Leftrightarrow \quad \operatorname{sen}(x) - \operatorname{tg}(x) \le \operatorname{sen}(x) - x \le \operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(x)\cos(x)$ $\quad / \cdot \frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\operatorname{sen}(x) - \operatorname{tg}(x)}{x^2} \le \frac{\operatorname{sen}(x) - x}{x^2} \le \frac{\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(x)\cos(x)}{x^2}$$

/ factorizo $\leftarrow \operatorname{sen}(x)$ $\rightarrow \operatorname{sen}(x)$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\operatorname{sen}(x)\left[1 - \frac{1}{\cos(x)}\right]}{x^2} \le \frac{\operatorname{sen}(x) - x}{x^2} \le \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \frac{\left[1 - \cos(x)\right]}{x}$$

/ sumo $\leftarrow$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\left[\frac{\cos(x) - 1}{\cos(x)\, x}\right] \le \frac{\operatorname{sen}(x) - x}{x^2} \le \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \frac{\left[1 - \cos(x)\right]}{x}$$

/ factorizo (-1) $\leftarrow$

Paso anterior

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}(-1)\left[\frac{1 - \cos(x)}{\cos(x)\, x}\right] \le \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - x}{x^2} \le \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \frac{\left[1 - \cos(x)\right]}{x}$$

/ $\lim_{x \to 0}$

Recordemos $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = 0$

$\cos(0) = 1$

$\lim_{u \to 1} \frac{\ln u}{u - 1} = 1$

$\lim_{u \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Sándwich de sandía.

tomando límite $x \to 0$

$$\Leftrightarrow \quad 1 \cdot (-1) \cdot \frac{0}{1} \le \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - x}{x^2} \le 1 \cdot 0 \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - x}{x^2} = 0. \quad //$$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos[x]}{[x]^2}$, la función está mal definida para $x \in [0,1)$

Notar que si $x \in [0,1)$ no está definido

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos[x]}{[x]^2} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1-\cos[x]}{[x]^2} \Rightarrow x \in [-1,0)$$

$$= \cancel{\lim_{x\to 0}} \frac{1-\cos(-1)}{1} = 1-\cos(-1)$$

Lo que ocurre acá es que como está indefinido para $x \to 0^+$, es decir $x \in [0,1)$, no tenemos límites laterales iguales, pero para poder dar una expresión calculamos el límite por izquierda!

Scanned with CamScanner

e) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x(|x-3|-5)}{x^2-4}$

1) Evaluamos

$$\frac{2(|-2-3|-5)}{4-4} = \frac{2 \cdot 0}{0}$$

2) Notemos que $|x-3|$ cambia su comportamiento según donde partemos x

si $x \in (3, \infty^+) \Rightarrow |x-3| = x-3$

si $x \in (-\infty, 3] \Rightarrow |x-3| = 3-x$

- Como estamos tomando límite $x \to -2$ podemos tomar una vecindad, mientras contenga -2 !

- tomamos (como es debido) $x \in (-2-\varepsilon, -2+\varepsilon)$ una vecindad de -2, $\varepsilon > 0$, en particular $\varepsilon = 2$.

Arbitrario, $\forall \varepsilon > 0$

$\Rightarrow x \in (-4, 0)$

$$\Rightarrow \lim_{x \to -2} \frac{x(|x-3|-5)}{x^2-4} = \lim_{x \to -2} \frac{x(3-x-5)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \to -2} \frac{x(\cancel{x+2})}{(x-2)(\cancel{x+2})}$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{-x}{x-2} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2} //$$

Propuesto

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - x}{x^k} \quad , \quad k \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$$

De qué depende?

El que me muestre desarrollo ~~antes~~ se ganará un dulce, Hasta agotar stock!

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(\pi x)}{\operatorname{sen}(x^2)} \cdot \underbrace{\dfrac{x^2\pi^2}{x^2\pi^2}}_{1}$ C.V.

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(\pi x)}{(\pi x)^2} \cdot \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{1} \cdot x^2 \cdot \pi^2$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(\pi x)}{(\pi x)^2} \cdot \frac{1}{\left[\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2}\right]} \cdot \pi^2$$

♡ ✶

♡ luego $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(\pi x)}{(\pi x)^2}$, si $u = \pi x$ cuando $x \to 0 \Rightarrow u \to 0$ || Justificación importante

$$\Rightarrow \lim_{u\to 0} \frac{1-\cos(u)}{u^2} = \frac{1}{2} \Big\}$$ límite conocido

✶ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2}$, si $v = x^2$ cuando $x \to 0 \Rightarrow v \to 0$ ||

$$\Rightarrow \lim_{\cancel{x}\to 0} \frac{\operatorname{sen}(v)}{v} = 1 \Big\}$$ límite conocido

Entonces nuestro límite final queda como

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(\pi x)}{(\pi x)^2} \cdot \frac{1}{\left[\frac{\operatorname{sen} x^2}{x^2}\right]} \pi^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{[1]} \cdot \pi^2 = \frac{\pi^2}{2} //$$

c) $\lim_{x \to 0} (\cos x)^{1/\operatorname{sen}^2(x)}$

1) Evaluar $\Rightarrow 1^{1/0}$

2) Matraca

Propiedad consistencia. $e^{\ln(a^n)} = a^n$; siempre que e^x y $\ln(x)$ estén bien definidas.

$$\lim_{x \to 0} (\cos(x))^{1/\operatorname{sen}^2(x)} = \lim_{x \to 0} \exp(\ln(\cos(x)^{1/\operatorname{sen}^2(x)}))$$

$$= \lim_{x \to 0} \exp\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)} \cdot \ln(\cos(x))\right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \exp\left[\frac{\ln(\cos(x))}{1 - \cos^2(x)}\right]$$

Luego $h = \cos(x)$, si $x \to 0$

$h \to 1$

$$= \lim_{h \to 1} \exp\left[\frac{\ln(h)}{1 - h^2}\right] = \lim_{h \to 1} \exp\left[\frac{\ln(h)}{-(h-1)(1+h)}\right]$$

Por continuidad de e^x y $\ln(x)$ puede entrar el límite, además de alg de límites

$$= \exp\left[\lim_{h \to 1} \frac{\ln(h)}{h-1} \cdot \frac{-1}{1+h}\right] = \exp\left[1 \cdot \frac{-1}{1+1}\right] = e^{-\frac{1}{2}} \,//$$

Scanned with CamScanner

d) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{x^2}}{x - x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}\left[e^{x-x^2} - 1\right]}{x - x^2}$

$u = x - x^2$, $x \to 0 \Rightarrow u \to 0$ || $= \lim_{x\to 0} \frac{e^{x-x^2} - 1}{x - x^2} = \lim_{u\to 0} \frac{e^u - 1}{u}$

$\Rightarrow \quad = e^{0^2} \cdot 1 = 1$ //

e) $\lim_{x\to 1} (1-x)\, tg\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ (1)

$= \lim_{x\to 1} (1-x) \frac{sen\, \frac{\pi}{2}x}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$

Veamos si $w = 1 - x$

$x \to 1 \Rightarrow w \to 0$ $\quad \frac{\pi}{2}x = (1-w)\frac{\pi}{2}$

$\lim_{x\to 1} \frac{1-x}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)} = \lim_{w\to 0} \frac{w}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - w\frac{\pi}{2}\right)}$

$= \lim_{w\to 0} \frac{w}{sen\left(\frac{\pi}{2}w\right)}$

$= \lim_{w\to 0} \frac{1}{\left[\frac{sen\left(\frac{\pi}{2}w\right)}{\frac{\pi}{2}w}\right]} \frac{1}{\frac{\pi}{2}}$

$V = \frac{\pi}{2}w$, $w \to 0 \Rightarrow V \to 0$

(2) $= \lim_{V\to 0} \frac{1}{\frac{sen(V)}{V}} \cdot \frac{2}{\pi} = 1 \cdot \frac{2}{\pi}$

(3) Luego junto todo

$\lim_{x\to 1} (1-x)\, tg\left(\frac{\pi}{2}x\right) = \frac{2}{\pi} \cdot \underbrace{1}_{\substack{x\to 1 \\ sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)}}$

Recordar lo más importante para el cambio de variable es que una vez que hacen esto no puede quedar con la variable anterior, y tender todo al mismo tiempo.

P3) a)
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|\text{sen}\, x| - |x|}{x}$$

Veamos que podemos estudiar la vecindad $x \in (0, \frac{\pi}{2})$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^+} \frac{\text{sen}(x) - x}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\text{sen}(x)}{x} - 1 = 1 - 1 = 0$$

b)
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|\text{sen}\, x| - |x|}{x}$$

Veamos que podemos estudiar $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^-} \frac{-\text{sen}(x) + x}{x} = \lim_{x \to 0^-} -\left[\frac{\text{sen}(x)}{x}\right] + \frac{x}{x} = -1 + 1 = 0$$

Como limites laterales son iguales el limite Existe y vale 0.

Terminamos!! Recuerden
postear sus dudas o preguntarme
por algún medio.
pgamez@dim.uchile.cl.

• $X_n \to l \iff \lim_{n\to\infty} X_n = l \iff (\forall \varepsilon>0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}) \mid |X_n - l| < \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$ SIEMPRE!

• X_n nula si $X_n \to 0$.

• X_N acotada si $(\exists M > 0)(\forall n \in \mathbb{N}) \mid |X_n| \leq M$.

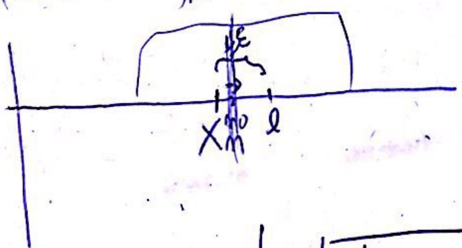
$\iff -M \leq X_n \leq M$.

• Teorema: Si (S_n) es una sucesión que converge a $l_1 \in \mathbb{R}$ y también $l_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow l_1 = l_2$

P1)

1) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{n} + 1} = 1$

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}) / |X_n - l| \leq \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$ } Definición



$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \left| \sqrt{\frac{1}{n} + 1} - 1 \right| \leq \varepsilon, \forall n \geq n_0$

$\sqrt{\alpha} \geq 0$ $\forall \alpha \in [0, \infty+]$

$\alpha = \frac{1}{n} + 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{n} + 1} \geq 0 + 1$ Toda raíz es ⊕ o 0

Además $\frac{1}{n} > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \underbrace{\sqrt{\frac{1}{n}+1} \geq 1} \geq 0$ $/+(-1)$ sumo ambos lados -1, y tomo la desigualdad de la izq

$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{n}+1} - 1 \geq 0$

Entonces $\underbrace{\left|\sqrt{\frac{1}{n}+1} - 1\right|}_{\geq 0} \leq \varepsilon$ # lo que está dentro de $|\cdot|$ siempre ≥ 0.

$n \neq 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{n}+1} - 1 \leq \varepsilon$ $/+1$

$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{n}+1} \leq \varepsilon + 1$ $/()^2$ Por qué?

$f(n) = \sqrt{\frac{1}{n}+1} \geq 0 \wedge \varepsilon + 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{n} + 1 \leq (\varepsilon + 1)^2$ $\Rightarrow g(x) = x^2 / g: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$

Biyectiva, sólo cuando cumplo esto puedo elevar al cuadrado

$\Leftrightarrow \frac{1}{n} \leq \underbrace{(\varepsilon+1)^2 - 1}_{\geq 0}$ $/\cdot n > 0$

$1 \leq ((\varepsilon+1)^2 - 1)n$

$\frac{1}{(\varepsilon+1)^2 - 1} \leq n$

Una vez que tengo una cota de n, puedo encontrar un n_0 a partir del cual converge

basta tomar $\left\lfloor \frac{1}{(\varepsilon+1)^2 - 1} \right\rfloor + 1 = n_0$

La función cajón me asegura que es natural y el $+1$ me asegura que se cumple, recordemos que es a partir de n_0

PDQ: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+3}{3n-1} = \dfrac{2}{3}$.

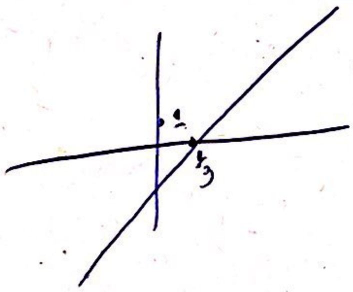
$\forall \varepsilon>0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0 \ \left| \dfrac{2n+3}{3n-1} - \dfrac{2}{3} \right| \leq \varepsilon.$ $\Big\}$ Definición

$\dfrac{2n+3}{3n-1} - \dfrac{2(3n-1)}{3(3n-1)} = \dfrac{3(2n+3) - 6n + 2}{3(3n+1)}$, tomo lo de adentro para ver como se comporta.

$= \dfrac{11}{3(3n-1)} \Big\}$ (+) se comporta.

$\underbrace{3}_{(+)}\underbrace{(3n-1)}$ ↳ Es una función lineal que es positiva a partir de $\frac{1}{3}$.

$\forall n \geq 1$



pues en particular $n \geq 1 \geq \frac{1}{3}$

Por lo que si $n \geq 1 \Rightarrow \dfrac{2n+3}{3n-1} - \dfrac{2}{3} \geq 0$

$\Rightarrow \left| \dfrac{2n+3}{3n-1} - \dfrac{2}{3} \right| \leq \varepsilon$

$\Leftrightarrow \dfrac{2n+3}{3n-1} - \dfrac{2}{3} \leq \varepsilon$

$\Leftrightarrow \dfrac{11}{3(3n-1)} \leq \varepsilon$ $\quad 3n+1 \geq 0$, si $n \geq \frac{1}{3}$

todo ≥ 0

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{3n+1} \leq \dfrac{3\varepsilon}{11} \Leftrightarrow 11 \leq 3\varepsilon(3n+1) \Leftrightarrow$

Scanned with CamScanner

$\Leftrightarrow \quad 11 \leq 3\varepsilon(3m+1)$

$\Leftrightarrow \quad \frac{11}{3\varepsilon} - 1 \leq 3m$

$\Leftrightarrow \quad \frac{11-3\varepsilon}{9\varepsilon} \leq m$ Encontré una cota.

basta tomar $\overbrace{\left\lfloor \frac{11-3\varepsilon}{9\varepsilon} \right\rfloor}^{\in \mathbb{N}} + 1 = m_0$. $\nearrow$ $m\in$ Asegura que se tiene.

$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{3n+1} = \frac{2}{3}$ tomamos la convergencia

[CONTRADICCIÓN]

iii) Supongamos que converge ¡Para demostrar.

PDG $\lim_{n\to\infty} n^2+1 = x_n$ diverge !!

Si converge $\exists l \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow \forall \varepsilon>0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 \; |n^2+1-l| \leq \varepsilon$ Definición de convergencia

Como es $\forall \varepsilon > 0$

en particular $\varepsilon = 1$ debe cumplir # Todos los elementos del conjunto lo cumplen.

$n^2+\cancel{1} - l \leq \cancel{1} \qquad \forall n \geq n_0$

$\Leftrightarrow \quad n^2 \leq l \quad / \forall n \geq n_0 \; l > 0 \quad / \sqrt{\ } \Rightarrow$ Biyectiva

$\Rightarrow \quad n \leq \sqrt{l}, \quad \forall n \geq n_0$

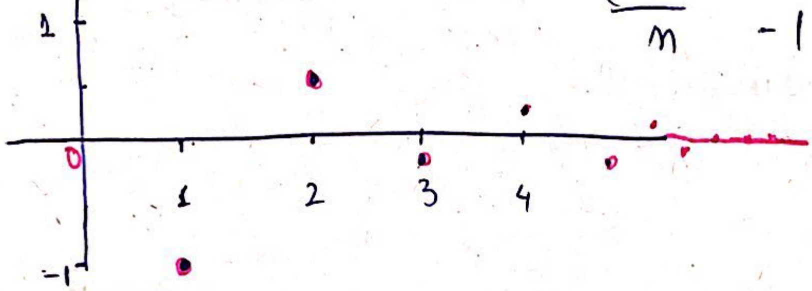
Los naturales son acotados $\ddot{\frown}$

Sea $M = \max\{x_1, x_2, \ldots x_{n_0}, \sqrt{l}\}$, $\forall n \geq n_0$, $n \leq M$ $\times$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \max \left\{ \frac{(-1)^n}{n}, \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right\}$ $n \neq 0$

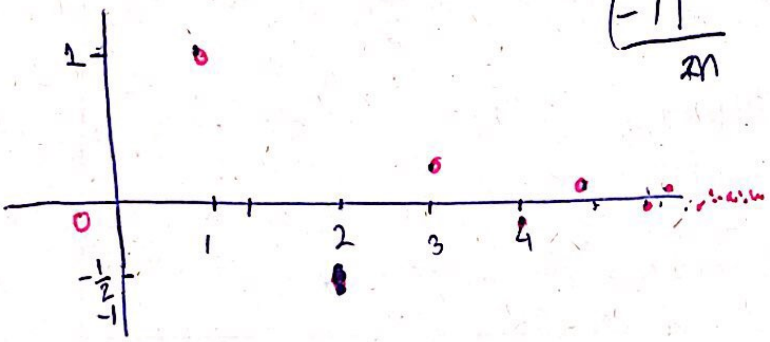
Veamos su comportamiento.

$\frac{(-1)^n}{n}$ $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4} \dots$



$\frac{(-1)^{n+1}}{n}$

$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots$



$\max \left\{ \frac{(-1)^n}{n}, \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right\}$

$\left\{ \underset{n=1}{\max\{-1, 1\}}, \underset{n=2}{\max\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\}}, \underset{n=3}{\max\{-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\}} \dots \right\}$

$= \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \dots \right\} = \frac{1}{n}$

su lím conocido y converge a igual

Pero esto es sólo la intuición. !! !!

$\forall$ la vida.

Golazo de media cancha

$\max\{A, B\} = \frac{A+B}{2} + \frac{|A-B|}{2}$

Propiedad que me permite calcular el máximo de manera algebraica. $\min\{A, B\} = \frac{A+B}{2} - \frac{|A-B|}{2}$

$$\max\left\{\frac{(-1)^n}{n}, \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right\}$$

$$= \frac{\frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^{n+1}}{n}}{2} + \frac{\left|\frac{(-1)^n}{n} - \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right|}{2}$$

$$= \underbrace{\frac{(-1)^n}{2n}\left[1 - 1\right]}_{\to 0} + \left|\frac{(-1)^n}{2n}\left[1 + 1\right]\right|$$

$\left|(-1)^n\right| = \{-1, 1, -1, 1, -1, 1 \dots\}$ Si le tomo valor absoluto siempre es 1.

$$= \frac{\left|(-1)^n\right| \cdot 2}{2n} = \frac{1}{n} \quad \boxed{///}$$

Su límite y convergencia lo tenemos de un comienzo, por prop arquimediana.

[Si y, es un número real y $x > 0$, existe un entero positivo tq $nx > y$]

Cualquier número por grande que sea, existe un natural que multiplicado por un positivo x es mayor! El caso del apunte es el caso particular de $y = 1$.

P2 | Calcular los límites

i) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n} - n \cdot \dfrac{(\sqrt{n^2+n}+n)}{(\sqrt{n^2+n}+n)}$ } 1 conveniente

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} \cdot \dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$ } 1 conveniente

Alg Límites

$= \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{\underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}_{\text{por P1} \to 1}+\underbrace{\frac{1}{n}}_{1/n\to 0}} \xrightarrow{\text{Alg Límites}} = \dfrac{\lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}.$

Yo ~~comentar~~ aplico todo el límite al mismo tiempo.

b) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+n}\right)^2$

$\alpha_1^2 \geq 0$, $\alpha_2^2 \geq 0$ . . . $\alpha_n^2 \geq 0$

$\sum_{k=1}^{n} \alpha_i^2 \geq 0$

A una fracción le quito elementos positivos del denominador

$$\Rightarrow \quad 0 \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+n}\right)^2 \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{n}\right)^2$$

$$0 \leq \qquad = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^{n} 1$$

$\Big\}$ $\sum$ constante.

$$0 \leq \qquad = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \cdot (n-1+1) \cdot 1$$

$$0 \leq \qquad = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$0 \qquad\qquad 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+n}\right)^2 = 0$$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n}$

$$n! = \underbrace{n\,(n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1}_{(n-1)\text{ elementos}}$$

$\leq n \quad \leq n \quad \leq n$

Como son elementos menores o iguales a n, si los reemplazo por n, será una cota superior,

$$0 \leq \frac{n!}{n^n} \leq \frac{n^{n-1}}{n^n} = \frac{1}{n}$$

$$0 \leq \lim \frac{n!}{n^n} \leq \lim \frac{1}{n}$$

$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$

$0 \qquad\qquad 0$

$$\Rightarrow \lim \frac{n!}{n^n} \to 0.$$

d) $\lim \dfrac{2^n+1}{n^2\cdot 3^{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{n^2\cdot 3^{n+1}} + \dfrac{1}{n^2\cdot 3^{n+1}}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{n^2}\cdot\cancel{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}} \Rightarrow$$

2 veces, sucesión nula

nula

acotada → Teorema nula por acotada

q^n, $|q| < 1 \Rightarrow \lim q^n \to 0$.

$$\lim \frac{2^n+1}{n^2\cdot 3^{n+1}} = 0$$

e) $\lim \left(\underbrace{\frac{3n-1}{2n+4}}_{s_n} \right)^n$

$\therefore$

$\lim s_n = \frac{3}{2} > 1 = \cancel{\ }$

$\Rightarrow \lim (s_n)^n = \infty$ por apunte.

diverge $\parallel$

$$\frac{2^n}{n^2 3^{n+1}} \leq \frac{2^n + 1}{n^2 \cdot 3^{n+1}} \leq \frac{2^n + 2^n}{n^2 3^{n+1}} = \frac{2^{n+1}}{n^2 \cdot 3^{n+1}} \Big/ \sqrt[n]{\ }$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{3} \cdot \sqrt[n]{n^2}} \leq \sqrt[n]{\frac{2^n + 1}{n^2 \cdot 3^{n+1}}} \leq \frac{\sqrt[n]{2} \cdot 2}{\sqrt[n]{n^2} \cdot 3 \cdot \sqrt[n]{3}}$$

$\downarrow$ $2/3$ $\qquad$ $\downarrow$ $2/3$

i)

mayor elemento

$$100m^2 \leq 100m^3$$

$$3 \leq 3m^3$$

$$m^3 \leq m^3 + 100m^2 + 3 \leq m^3 + \overbrace{100m^3} + 3m^3 \qquad /\sqrt[n]{\ }$$

$$\sqrt[n]{m^3} \leq \sqrt[n]{m^3 + 100m^2 + 3} \leq \sqrt[n]{104} \cdot \sqrt[n]{m^3}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$1 \qquad 1 \qquad 1$$

Por Teorema Sándwich

//

P3)

Sea (a_n) se que existe $\lim_{n\to\infty} n a_n$. Dem $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Indicación

Si $X_n \to l$, y se tiene $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f(n) \geq n \Rightarrow X_{f(n)} \to l$

$f(n) = \bar{n} \geq n \geq n_0$

$\Rightarrow \to l$

Indicación

Si $X_n \to l$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0 \; |X_n - l| < \varepsilon$ ① Definición

Veamos que si $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\underline{f(n) \geq n}$ *

↳ creciente como $n+1$, n^2+1000 etc.

$\Rightarrow X_{f(n)} \to l$,

PDQ.

$(\forall \varepsilon > 0), (\exists n_0' \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0') \underbrace{|X_{f(n)} - l| < \varepsilon}_{\text{lo que quiero}}$

Nosotros sabemos que dado $\varepsilon > 0$

$|X_n - l| < \varepsilon \quad , \forall n \geq n_0$ ②

luego si $n_0' = n_0$

$\Rightarrow f(n_0') \geq n_0 \Rightarrow |X_{f(n_0')} - l| < \varepsilon$

Además si $\underline{n \geq n_0' = n_0}$

$\Rightarrow f(n) \geq n \geq n_0 \Rightarrow f(n) \geq n_0 \Rightarrow |X_{f(n)} - l| < \varepsilon$ //

$n \cdot a_n \longrightarrow l \in \mathbb{R}$

PDQ $a_n \to 0$

$(\exists\, \varepsilon > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\exists\, n' \geq n) : |a_n - 0| > 0|$

ε fijo

$n' = f(n) \geq n$

(Para cada n $\exists n' \geq n$

$|a_{f(n)} - 0| > \varepsilon$

$\therefore$ Se tiene $|a_{f(n)}| > \varepsilon \ (\forall n \in \mathbb{N})$

Indicación

Acá usé la indicación

Pero.

$\underbrace{a_n \cdot n} \to l \Rightarrow f(n) \cdot a_{f(n)} \to l$

$c_n \to l \Rightarrow c_{f(n)} \longrightarrow l$

$\Rightarrow c_n$ acotada pues converge

pero

$|c_n| = |f(n) \cdot a_{f(n)}| = |f(n)||a_{f(n)}| \geq f(n) \cdot \varepsilon$

$\geq n \cdot \varepsilon$

$|c_n| \geq n \cdot \varepsilon \to \infty$

P4.

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{7^{n} + 5^{n} + 3^{n}}}$$

Si bien $7^{n}, 5^{n}, 3^{n} \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{7^{n}} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{7^{n} + 5^{n} + 3^{n}}.$$

$$= \lim_{n\to\infty} 7$$

$$= 7 \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{7^{n} + 5^{n} + 3^{n}} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{7^{n} + 7^{n} + 7^{n}}$$

$7 \leq$  $\leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3} \cdot \sqrt[n]{7^{n}}$

$7 \leq$  $\leq 1 \cdot 7$.

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{7^{n} + 5^{n} + 3^{n}} \;//$$

P5)

a) Se hizo antes !!

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+2}{n^2+1}\right)^{n^2}$

Recordemos

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n'}\right)^{n'} \to e$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+2}{n^2+1}\right)^{n^2} \xrightarrow{} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+1\right)^{n^2+1-1}$$

$$\xrightarrow[\text{parte a)}]{} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+1\right)^{n^2+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+1\right)}$$

$$= \frac{e}{1} \quad //$$

P6

Caso base $n=2$.

$a_1 \in (0,1)$

$a_0 \in (0,1)$

$$a_2 = \frac{a_1}{2}(1+a_0^2)$$

$\Rightarrow 0 < a_0 < 1$

$0 < a_0^2 < 1 \quad /+1$

$0 < 1 < a_0^2+1 < 2 \quad /\cdot \frac{1}{2}$

$0 < \frac{a_0^2+1}{2} < 1 \quad /\cdot a_1$

$0 < \frac{(a_0^2+1)}{2} a_1 < 1$ //

Inducción fuerte

Asumo k cumple

HI $\cancel{a_k} \in (0,1) \Rightarrow a_{k+1} = a_k \frac{(1+a_{k-1}^2)}{2} \in (0,1)$

$a_k \in (0,1)$

$$a_{k+2} = a_{k+1}\frac{(1+a_k^2)}{2}$$

$0 < 1 < a_k^2+1 < 2 \quad / \frac{1}{2}$

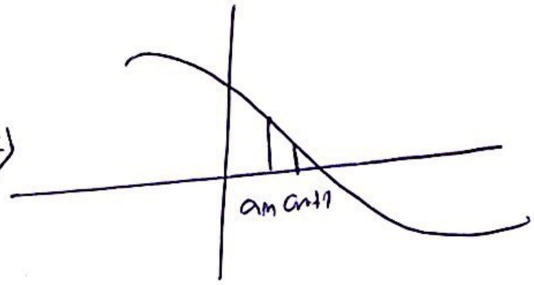
$0 < \frac{a_k^2+1}{2} < 1 \quad / \cdot a_{k+1}$

$0 < a_{k+1}\frac{(a_k^2+1)}{2} < 1$. $\square$

ii) notar $a_{n+1} = a_n \dfrac{(a_{n-1}^2 + 1)}{2}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n-1}^2 + 1}{2} < \frac{1+1}{2} = 1$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Leftrightarrow$$



Sucesión decreciente y acotada, por lo que converge.

iii) Como existe límite, yo puedo decir $\lim a_n = l$

$$\Rightarrow \lim a_n = \lim a_{k-1} \frac{(1 + a_{k-2}^2)}{2}$$

$$l = \lim a_n = \lim \frac{a_{k-1}}{2} + \lim \frac{a_{k-2}^2 \cdot a_{k-1}}{2} = \lim a_{k-1}$$

$$\Rightarrow l = \frac{l}{2} + \frac{(l^2 \cancel{+1})\,l}{2} \Rightarrow 0 = \frac{l}{2}\left[l^2 \cancel{+1} - 1\right]$$

Es importante estudiar los casos y descartar los demás

$\Rightarrow l = 0$

$\Rightarrow l = \pm 1$

$l \neq -1$

$l \neq 1 \vee$ decreciente

$\Rightarrow l = 0$

$a_n \notin [0,1]^c$

P7)

Sea una sucesión creciente

$u_n \uparrow$

$v_n \downarrow$

$\lim (u_n - \cancel{x} v_n) = 0.$

PDQ: $\lim u_n = \lim v_n = l.$

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 \mid u_n - v_n - 0| < \varepsilon$

si $\varepsilon = 1, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0$

$-1 < \underline{u_n - v_n < 1} \quad / + v_n$

$\Rightarrow u_n < 1 + v_n < 1 + v_{n_0}, \exists n_0$

Entonces

Como $u_n \uparrow$ y acotada $\Rightarrow \exists \lim u_n$

Por TSM.

$\cdot -1 / \quad 1 > \underbrace{-u_n + v_n > -1}$

$\Rightarrow v_n > u_n - 1 > \underline{u_{n_0} - 1} \Rightarrow \exists \lim v_n$

Como $v_n \downarrow$ y acotada Por TSM.

Scanned with CamScanner

$\lim U_n - V_n = 0$

$\lim U_n - \lim V_n = 0$

$\lim U_n = \lim V_n$ //

Sólo puedo hacer este paso porque cada uno tiene lím por separado.

Sea S_n sucesión acotada

Ejercicio Adicional de control

$\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |S_n| \leq M$

I) Dem $\forall n > M$ $\quad \frac{1}{n+S_n} \leq \frac{1}{n-M}$

$\underbrace{-M \leq S_n} \leq M$

$-M \leq S_n \quad / + n$

$n - M \leq S_n + n \quad / (\,)^{-1}$ # ojo la desigualdad

$\frac{1}{n-M} \geq \frac{1}{S_n+n}$ //

II) $\frac{1}{n+S_n} \to 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+S_n} = 0 \iff \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 \left|\frac{1}{n+S_n} - 0\right| < \varepsilon$

$\left|\frac{1}{n+S_n}\right|, \quad \frac{1}{n+S_n} \leq \frac{1}{n-M} < \varepsilon \quad , n > M$

$\Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} < \frac{1 \cdot (n-M)}{1} \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} + M$

basta $n_0 = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} + M \right\rfloor + 1$, $\forall n \geq n_0 \geq M$ $\quad \left|\frac{1}{n+S_n}\right| < \varepsilon \iff \frac{1}{n+S_n} \to 0$

Scanned with CamScanner

$\lim a_n = \lim \frac{n^2}{2n-1} - \frac{n^2}{2n+1}$

$= \lim n^2 \left[\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right]$

$= \lim n^2 \left(\frac{\cancel{2n}+1 - \cancel{2n}+1}{4n^2-1}\right) = \lim \frac{2n^2}{4n^2-1} \cdot \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim \frac{2}{4-\frac{1}{n^2}}$

$= \frac{\cancel{\lim 2}^{2}}{\cancel{\lim 4} - \cancel{\lim \frac{1}{n^2}}^{0}}$

$= \frac{1}{2}$

Luego si $\frac{1}{n \cdot a_n}$, entonces se va a 0 por parte anterior.

a_n converge $\Rightarrow$ acotada

Terminamos !

cualquier duda a mi correo

pyanez@dim.uchile.cl

Ash se despide de Brock