Departamento de Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA1001: Introducción al Cálculo 2022-1

Pauta de corrección Control 3

P1. a) (4 pts) Resolver la ecuación $\operatorname{sen}(2x)\cos(x) = 6\operatorname{sen}^3(x)$.

Solución: Usando la identidad de seno del ángulo doble y la identidad fundamental, la ecuación es equivalente a:

$$\iff \quad 2\operatorname{sen}(x)\cos^2(x) = 6\operatorname{sen}^3(x)$$

0.5

$$\iff \quad \operatorname{sen}(x)\Big(\cos^2(x) - 3\operatorname{sen}^2(x)\Big) = 0$$

$$\iff \quad \operatorname{sen}(x)\Big(1 - 4\operatorname{sen}^2(x)\Big) = 0$$

1.0

$$\iff \quad \operatorname{sen}(x)\Big(1 - 2\operatorname{sen}(x)\Big)\Big(1 + 2\operatorname{sen}(x)\Big) = 0$$

$$\iff \quad \operatorname{sen}(x) = 0 \quad \vee \quad \operatorname{sen}(x) = \frac{1}{2} \quad \vee \quad \operatorname{sen}(x) = -\frac{1}{2}$$

0.5

Las soluciones de cada una de estas ecuaciones es:

$$\operatorname{sen}(x) = 0 \quad \iff \quad x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

0.5

$$\operatorname{sen}(x) = \frac{1}{2} \quad \iff \quad x = k\pi + (-1)^k\frac{\pi}{6}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{sen}(x) = -\frac{1}{2} \quad \iff \quad x = k\pi - (-1)^k\frac{\pi}{6}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

(Resolver una de estas dos =1.0, la segunda +0.5)

1.5

b) (2 pts) Demostrar la identidad $\sec(2x) = \dfrac{1+\operatorname{tg}^2 x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$.

Solución: Usando la definición de secante y la fórmula del ángulo doble queda:

$$\sec(2x) = \frac{1}{\cos(2x)} = \frac{1}{cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}$$

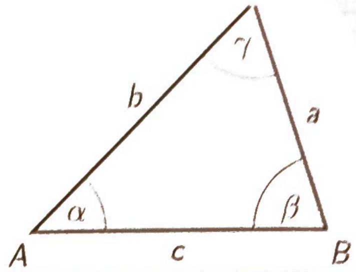
1.0

donde, dividiendo arriba y abajo por $\cos^2$ y usando la fundamental en tangente, queda

$$= \frac{\sec^2 x}{1-\operatorname{tg}^2 x} == \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$$

1.0

P2. a) **(3 pts)** Considere un triángulo ABC de ángulos interiores α, β, γ y lados opuestos a los ángulos a, b, c respectivamente. Demuestre que $a^2\,\mathrm{sen}(2\beta) + b^2\,\mathrm{sen}(2\alpha) = 2ab\,\mathrm{sen}\,\gamma$.



Solución: Usando la identidad de seno del ángulo doble y el teorema del seno queda:

$$a^2\,\mathrm{sen}(2\beta) + b^2\,\mathrm{sen}(2\alpha) = 2a^2\,\mathrm{sen}\,\beta\cos\beta + 2b^2\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha$$

1.0

$$= 2ab\sin\alpha\cos\beta + 2ab\,\mathrm{sen}\,\beta\cos\alpha$$

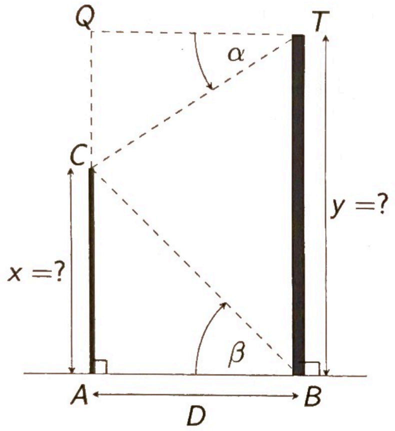
1.0

$$= 2ab\Big(\mathrm{sen}\,\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\Big)$$

$$= 2ab\,\mathrm{sen}(\alpha+\beta) = 2ab\,\mathrm{sen}\,\gamma$$

1.0

b)



(3 pts) La antena vertical AC y el edificio BT, de la figura, se encuentran en un mismo plano vertical $ABCT$.

Desde la terraza T del edificio se ve el extremo superior C de la antena con un ángulo de depresión α y desde la base del edificio, se ve el mismo extremo superior C con un ángulo de elevación β (ver figura).

Sabiendo que la distancia entre el edificio y la antena es D, se pide determinar la altura x de la antena y la altura y del edificio.

OBS: La antena y el edificio son verticales y la base AB es horizontal.

Solución: En el triángulo rectángulo ABC conocemos el cateto AB y el ángulo β, por lo tanto:

$$x = D\,\mathrm{tg}\,\beta$$

1.0

Llamando Q al punto de intersección de la horizontal por T y la vertical por la antena, se tiene que en el triángulo rectángulo CQT se conoce su base $\overline{QT} = D$ y el ángulo opuesto al cateto CQ. Por lo tanto $\overline{CQ} = D\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Así, sumando se tiene que

$$y = x + \overline{CQ} = D(\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta).$$

2.0

Alternativamente (para la segunda parte), del triángulo ABC se calcula la hipotenusa

$$\overline{BC} = D\sec\beta = \frac{D}{\cos\beta}$$

0.5

En el triángulo BCT ahora conocemos el lado $\overline{BC}$ y los ángulos:

$$\begin{aligned} \text{opuesto a } \overline{BC}: &\quad = \frac{\pi}{2} - \alpha \\ \text{opuesto a } \overline{BT}: &\quad = \alpha + \beta \end{aligned}$$

Por lo tanto, usando el teorema del seno queda:

$$\frac{\overline{BC}}{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - \alpha)} = \frac{\overline{BT}}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}$$

de donde

$$\overline{BT} = \overline{BC}\frac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\cos\alpha} \qquad = D\frac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

1.5

(*) El último paso no es directo.

$$2ab \operatorname{sen}(\alpha + \beta) = 2ab \operatorname{sen}(\pi - \gamma) \qquad (\alpha + \beta + \gamma = \pi)$$
$$= 2ab \operatorname{sen}(\gamma).$$

* Hay distintas formas de hacerlo, pero tengan ojo en la justificación.