Control 3

P1. Sea $X \subseteq \mathbb{R}$ un subconjunto que satisface las siguientes condiciones:

i) $0 \in X$,

ii) $\forall r, t \in X$, $r + t \in X$.

(Se sabe que tanto $\mathbb{N}$ como $\mathbb{Z}$ satisfacen las condiciones anteriores).

Dado el subconjunto X, se define en $\mathbb{R}$ la relación $\mathcal{R}_X$ como sigue:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x \,\mathcal{R}_X\, y \iff (x - y) \in X.$$

a) (3 pts.) Demuestre que, para todo $X \subseteq \mathbb{R}$ que satisface las condiciones i) y ii), $\mathcal{R}_X$ es una relación refleja y transitiva.

Solución:
Veamos primero que $\mathcal{R}_X$ es refleja. Sea $x \in \mathbb{R}$. Tenemos que $x \,\mathcal{R}_X\, x \iff (x - x) \in X \iff 0 \in X$ **(0,75 pts.)**, lo que es verdadero por la condición i). Concluimos que $\mathcal{R}_X$ es refleja **(0.75 pts.)**

Veamos ahora que $\mathcal{R}_X$ es transitiva. Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$. Supongamos que $x \,\mathcal{R}_X\, y$ y que $y \,\mathcal{R}_X\, z$. Esto es, supongamos que $(x - y) \in X$ y que $(y - z) \in X$ **(0,5 pts.)**. Tomemos $r = x - y$ y $t = y - z$. Por lo anterior, $r, t \in X$. Luego, por la condición ii), $r + t \in X$ **(0,5 pts.)** Por otro lado,

$$r + t = (x - y) + (y - z) = (x - z)$$

lo que muestra que $(x - z) \in X$. Así, $x \,\mathcal{R}_X\, z$. Concluimos que $\mathcal{R}_X$ es transitiva **(0,5 pts.)**

b) (1 pto.) Demuestre que $\mathcal{R}_\mathbb{N}$ es una relación de orden.

Solución:
Usando la parte a), falta demostrar que $\mathcal{R}_\mathbb{N}$ es antisimétrica **(0,2 pts.)** Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Supongamos que $x \,\mathcal{R}_\mathbb{N}\, y$ y que $y \,\mathcal{R}_\mathbb{N}\, x$. Esto es, supongamos que $(x - y) \in \mathbb{N}$ y que $(y - x) \in \mathbb{N}$ **(0,2 pts.)** Si tomamos $r = x - y$, tenemos entonces que $r \in \mathbb{N}$ y que $-r \in \mathbb{N}$. Esto muestra que $r = 0$, porque 0 es el único número natural cuyo inverso aditivo también es un número natural **(0,2 pts.)** Por lo tanto, tenemos que $r = x - y = 0$. Concluimos que $x = y$ y obtenemos, así, que $\mathcal{R}_\mathbb{N}$ es antisimétrica **(0,2 pts.)** Finalmente, tenemos que $\mathcal{R}_\mathbb{N}$ es una relación de orden **(0,2 pts.)**

c) (2 pts.) Demuestre que $\mathcal{R}_\mathbb{Z}$ es una relación de equivalencia. Además, demuestre que $[p]_{\mathcal{R}_\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$ para todo $p \in \mathbb{Z}$.

Solución:
Veamos primero que $\mathcal{R}_\mathbb{Z}$ es una relación de equivalencia. Por la parte a), falta demostrar que $\mathcal{R}_\mathbb{Z}$ es simétrica **(0,2 pts.)** Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Supongamos que $x \,\mathcal{R}_\mathbb{Z}\, y$. Esto es, supongamos que $(x - y) \in \mathbb{Z}$. Tomemos $r = x - y$ **(0,2 pts.)** Como $r \in \mathbb{Z}$, tenemos que $-r \in \mathbb{Z}$, porque el inverso aditivo de un número entero también es un número entero **(0,2 pts.)** Vemos que $-r = -(x - y) = y - x \in \mathbb{Z}$, lo que muestra que $y \,\mathcal{R}_\mathbb{Z}\, x$. Así, $\mathcal{R}_\mathbb{Z}$ es simétrica **(0,2 pts.)** Finalmente, tenemos que $\mathcal{R}_\mathbb{Z}$ es una relación de equivalencia **(0,2 pts.)**

Veamos ahora que $[p]_{\mathcal{R}_\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$ para todo $p \in \mathbb{Z}$. Sea $p \in \mathbb{Z}$. Demostraremos esta igualdad de conjuntos por doble inclusión.

$\boxed{\subseteq}$ Si $q \in [p]_{\mathcal{R}_\mathbb{Z}}$, tenemos que $(p - q) \in \mathbb{Z}$. Esto significa que existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $p - q = n$ **(0,2 pts.)**.

Por lo tanto, $q = n - p \in \mathbb{Z}$, ya que la resta de dos números enteros también es un número entero **(0,2 pts.)**

$\boxed{\supseteq}$ Si $q \in \mathbb{Z}$, tenemos que $(p - q) \in \mathbb{Z}$, porque la resta de dos números enteros también es un número entero **(0,2 pts.)** Así, $p \mathrel{\mathcal{R}_{\mathbb{Z}}} q$, por lo que $q \in [p]_{\mathcal{R}_{\mathbb{Z}}}$ **(0,2 pts.)**

Obtenemos entonces que $[p]_{\mathcal{R}_{\mathbb{Z}}} \subseteq \mathbb{Z}$ y que $[p]_{\mathcal{R}_{\mathbb{Z}}} \supseteq \mathbb{Z}$, por lo que $[p]_{\mathcal{R}_{\mathbb{Z}}} = \mathbb{Z}$ **(0,2 pts.)**

<u>Indicación:</u> Recuerde que puede usar las partes anteriores incluso si no las ha resuelto.

P2. Sea A un conjunto no vacío. Sea $\mathcal{F} = \{f\colon A \to A \mid f \text{ es una función}\}$, es decir, $\mathcal{F}$ es el conjunto de todas las funciones de A en A. Sea $g\colon A \to A$ una función biyectiva. Se define la función $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ por

$$\varphi(f) = g \circ f.$$

a) Sea $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ definido por $\mathcal{H} = \{f\colon A \to A \mid f \text{ es una función biyectiva}\}$.

i) (2 pts.) Demuestre que, para todo $h \in \mathcal{H}$, existe $f \in \mathcal{H}$ tal que $g \circ f = h$.

Solución:
Sea $h \in \mathcal{H}$. Como g es biyectiva, existe su inversa g^{-1} **(0,4 pts.)** Tomemos $f = g^{-1} \circ h$ **(0,4 pts.)** Esta función pertenece a $\mathcal{H}$, porque la composición de dos funciones biyectivas es, a su vez, biyectiva **(0,4 pts.)** Además,

$$\begin{aligned}
g \circ f &= g \circ (g^{-1} \circ h) && \text{(Definición de } f \text{ } \textbf{(0,2 pts.)}\text{)}\\
&= (g \circ g^{-1}) \circ h && \text{(Asociatividad de la composición } \textbf{(0,2 pts.)}\text{)}\\
&= \mathrm{id}_A \circ h && \text{(Composición de una función con su inversa } \textbf{(0,2 pts.)}\text{)}\\
&= h. && \text{(La identidad es neutro para la composición } \textbf{(0,2 pts.)}\text{)}
\end{aligned}$$

ii) (2 pts.) A partir de i), concluya la siguiente igualdad de conjuntos: $\varphi(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$.

Solución:
Demostraremos la igualdad de conjuntos por doble inclusión.

$\boxed{\subseteq}$ Si $f \in \varphi(\mathcal{H})$, entonces existe $h \in \mathcal{H}$ tal que $f = \varphi(h)$ por definición del conjunto imagen **(0,3 pts.)** Así, $f = g \circ h$, por definición de φ **(0,3 pts.)** Como g es biyectiva y h es biyectiva, tenemos que f es biyectiva porque la composición de dos funciones biyectivas es, a su vez, biyectiva **(0,2 pts.)** Concluimos que $f \in \mathcal{H}$ **(0,2 pts.)**

$\boxed{\supseteq}$ Si $h \in \mathcal{H}$, por la parte i), existe $f \in \mathcal{H}$ tal que $g \circ f = h$ **(0,5 pts.)** Esto es, tenemos que $\varphi(f) = h$ **(0,2 pts.)** Como $f \in \mathcal{H}$, por definición de conjunto imagen, obtenemos que $h \in \varphi(\mathcal{H})$ **(0,3 pts.)**

b) (2 pts.) Demuestre que φ es biyectiva y calcule su inversa.

Solución:
Primera forma: Veamos primero que φ es inyectiva. Sean $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$ y supongamos que $\varphi(f_1) = \varphi(f_2)$ **(0,2 pts.)** Como g es biyectiva, existe su inversa g^{-1} **(0,2 pts.)** Así,

$$\begin{aligned}
\varphi(f_1) = \varphi(f_2) &\iff g \circ f_1 = g \circ f_2 && \text{(Definición de } \varphi\text{)}\\
&\implies g^{-1} \circ (g \circ f_1) = g^{-1} \circ (g \circ f_2) && \text{(Composición por la izquierda por } g^{-1}\text{)}\\
&\iff (g^{-1} \circ g) \circ f_1 = (g^{-1} \circ g) \circ f_2 && \text{(Asociatividad de la composición)}\\
&\iff \mathrm{id}_A \circ f_1 = \mathrm{id}_A \circ f_2 && \text{(Composición de una función por su inversa)}\\
&\iff f_1 = f_2. && \text{(La identidad es neutro para la composición)}\\
& && \text{(}\textbf{(0,2 pts.)}\text{)}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, φ es inyectiva **(0,2 pts.)**

Veamos ahora que φ es epiyectiva. Sea $h \in \mathcal{F}$ y debemos ver que existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $\varphi(f) = h$ **(0,2 pts.)** Tomemos $f = g^{-1} \circ h$, donde usamos nuevamente que g es biyectiva **(0,2 pts.)** Luego,

$$\begin{aligned}
\varphi(f) &= g \circ f && \text{(Definición de } \varphi\text{)}\\
&= g \circ (g^{-1} \circ h) && \text{(Definición de } f\text{)}\\
&= (g \circ g^{-1}) \circ h && \text{(Asociatividad de la composición)}\\
&= \mathrm{id}_A \circ h && \text{(Composición de una función con su inversa)}\\
&= h. && \text{(La identidad es neutro para la composición)}\\
& && (\textbf{(0,2 pts.)})
\end{aligned}$$

Concluimos que φ es epiyectiva **(0,2 pts.)**
Calculemos ahora la inversa de φ. Sean $f, h \in \mathcal{F}$ tales que $\varphi(f) = h$ y "despejemos f". Tenemos que

$$\begin{aligned}
\varphi(f) = h &\iff g \circ f = h && \text{(Definición de } \varphi\text{)}\\
&\implies g^{-1} \circ (g \circ f) = g^{-1} \circ h && \text{(Composición por la izquierda por } g^{-1}\text{)}\\
&\iff (g^{-1} \circ g) \circ f = g^{-1} \circ h && \text{(Asociatividad de la composición)}\\
&\iff \mathrm{id}_A \circ f = g^{-1} \circ h && \text{(Composición de una función por su inversa)}\\
&\iff f = g^{-1} \circ h. && \text{(La identidad es neutro para la composición)}\\
& && (\textbf{(0,2 pts.)})
\end{aligned}$$

Luego, definiendo $\psi \colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ por

$$\psi(h) = g^{-1} \circ h$$

los cálculos anteriores muestran que $\psi(\varphi(f)) = f$ para todo $f \in \mathcal{F}$. Como además

$$\mathrm{Dom}(\psi \circ \varphi) = \mathrm{Dom}(\varphi) = \mathcal{F} = \mathrm{Dom}(\mathrm{id}_{\mathcal{F}})$$

y

$$\mathrm{Cod}(\psi \circ \varphi) = \mathrm{Cod}(\psi) = \mathcal{F} = \mathrm{Cod}(\mathrm{id}_{\mathcal{F}}),$$

obtenemos que $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathcal{F}}$. Finalmente, como φ es biyectiva, concluimos que $\varphi^{-1} = \psi$ **(0,2 pts.)**

Segunda forma: Sea $\psi \colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ dada por

$$\psi(f) = g^{-1} \circ f.$$

Veamos que $\psi \circ \varphi = \varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{\mathcal{F}}$. Esto demostrará simultáneamente que φ es biyectiva y que ψ es su inversa **(0,4 pts.)**
Observemos primero que

$$\mathrm{Dom}(\psi \circ \varphi) = \mathrm{Dom}(\varphi) = \mathcal{F} = \mathrm{Dom}(\mathrm{id}_{\mathcal{F}})$$

y que

$$\mathrm{Cod}(\psi \circ \varphi) = \mathrm{Cod}(\psi) = \mathcal{F} = \mathrm{Cod}(\mathrm{id}_{\mathcal{F}}).$$

Por lo tanto, el dominio y codominio de $\psi \circ \varphi$ coinciden con el dominio y codominio de $\mathrm{id}_{\mathcal{F}}$ **(0,2 pts.)**
Similarmente, se tiene que

$$\mathrm{Dom}(\varphi \circ \psi) = \mathrm{Dom}(\psi) = \mathcal{F} = \mathrm{Dom}(\mathrm{id}_{\mathcal{F}})$$

y que

$$\mathrm{Cod}(\varphi \circ \psi) = \mathrm{Cod}(\varphi) = \mathcal{F} = \mathrm{Cod}(\mathrm{id}_{\mathcal{F}}).$$

Por lo tanto, el dominio y codominio de $\varphi \circ \psi$ coinciden con el dominio y codominio de $\mathrm{id}_{\mathcal{F}}$ **(0,2 pts.)**

Sea ahora $f \in \mathcal{F}$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\psi \circ \varphi(f) &= \varphi(\psi(f)) && \text{(Definición de la composición)}\\
&= \psi(g \circ f) && \text{(Definición de } \varphi\text{)}\\
&= g^{-1} \circ (g \circ f) && \text{(Definición de } \psi\text{)}\\
&= (g^{-1} \circ g) \circ f && \text{(Asociatividad de la composición)}\\
&= \mathrm{id}_A \circ f && \text{(Composición de una función por su inversa)}\\
&= f. && \text{(La identidad es neutro para la composición)}
\end{aligned}$$

Concluimos así que $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathcal{F}}$ **(0,5 pts.)**
Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\varphi \circ \psi(f) &= \psi(\varphi(f)) && \text{(Definición de la composición)}\\
&= \varphi(g^{-1} \circ f) && \text{(Definición de } \psi\text{)}\\
&= g \circ (g^{-1} \circ f) && \text{(Definición de } \varphi\text{)}\\
&= (g \circ g^{-1}) \circ f && \text{(Asociatividad de la composición)}\\
&= \mathrm{id}_A \circ f && \text{(Composición de una función por su inversa)}\\
&= f. && \text{(La identidad es neutro para la composición)}
\end{aligned}$$

Concluimos también que $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{\mathcal{F}}$ **(0,5 pts.)** Esto muestra que φ es biyectiva y que $\varphi^{-1} = \psi$ **(0,2 pts.)**

Duración: 1h 15'.