Pauta Auxiliar 1 MA2001 - 7

Recuerdos **Norma** :

- $\|x\| \geq 0$
- $\|x\| = 0 \iff x = \vec{0}$
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Ej:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^p \right)^{1/p} \qquad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq N} |x_i|$$

(Verificado es Norma)

Lo más difícil <u>Desigualdad Triangular</u>

$$\boxed{\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p \quad \forall p \geq 1 \quad \text{(Desigualdad de Minkowski)}}$$

Para probarlo se usa la <u>desigualdad de Hölder</u>

$$\boxed{|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_p \|y\|_q \quad \text{donde } p, q \geq 1 \text{ y } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1}$$

<u>Desigualdad de Young</u> $\quad ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ con $a > 0$ y $b > 0$, $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\boxed{\text{Resumen: D. Young} \Rightarrow \text{D. Hölder} \Rightarrow \text{D. Minkowski}}$$

P1 $F(x) = \sqrt{a^2x_1^2+b^2x_2^2}$, con $a\neq 0$ y $b\neq 0$

Notando que $F(x) = \|(ax_1, bx_2)\|_2 = \|h(x)\|_2$

Con $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$(x_1,x_2) \to (ax_1, bx_2)$

$$\left.\begin{array}{l} h(\lambda x) = \lambda h(x) \\ h(x+w) = h(x) + h(w) \end{array}\right\} h(\lambda x+w) = \lambda h(x) + h(w)$$

Opción 1 ¿ $F(x) = 0 \iff x = \vec{0}$?

$$F(\vec{0}) = \sqrt{a^2 0^2 + b^2 0^2} = \sqrt{0+0} = 0$$

$$0 = F(x) = \sqrt{a^2x_1^2+b^2x_2^2} \Rightarrow 0 = a^2x_1^2 + b^2x_2^2 \quad (1)$$

$$\begin{array}{l} a^2x_1^2 \geq 0 \\ b^2x_2^2 \geq 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} -a^2x_1^2 \leq 0 \\ -b^2x_2^2 \leq 0 \end{array}$$

$(1) \Rightarrow \quad 0 \leq a^2x_1^2 = -b^2x_2^2 \leq 0 \Rightarrow a^2x_1^2 = 0$

$- \; b^2x_2^2 = 0.$

Como a y b son no nulos $\Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{array}}$

$\Rightarrow \quad F(x) = 0 \iff x = \vec{0}$

¿ $F(x) \geq 0$?

Por definición $\sqrt{z} \geq 0$ y $a^2x_1^2 + b^2x_2^2 \geq 0$ (bien definida)

¿ $F(\lambda x) = |\lambda| F(x)$?

$$F(\lambda x) = \sqrt{a^2\lambda^2x_1^2 + b^2\lambda^2x_2^2} = \sqrt{\lambda^2(a^2x_1^2 + b^2x_2^2)}$$
$$= |\lambda| F(x)$$

¿ $F(x+y) \leq F(x) + F(y)$?

$$F(x+y) = \sqrt{a^2(x_1+y_1)^2 + b^2(x_2+y_2)^2}$$

$$F(x) + F(y) = \sqrt{a^2x_1^2 + b^2x_2^2} + \sqrt{a^2y_1^2 + b^2y_2^2}$$

Como $F(x) \geq 0$ es equivalente probar que:

$$F(x+y)^2 \leq (F(x) + F(y))^2$$

$$\Leftrightarrow a^2(x_1+y_1)^2 + b^2(x_2+y_2)^2 \leq (a^2x_1^2 + b^2x_2^2) + 2\sqrt{(a^2x_1^2+b^2x_2^2)}\cdot\sqrt{(a^2y_1^2+b^2y_2^2)}$$
$$+ (a^2y_1^2 + b^2y_2^2)$$

$$\Leftrightarrow 2(a^2x_1y_1 + b^2x_2y_2) \leq 2\sqrt{\%}\sqrt{\%}$$

$$\iff \underbrace{a x_1 \cdot a y_1 + b x_2 \cdot b y_2} \le \underbrace{\sqrt{a x_1 \cdot a x_1 + b x_2 \cdot b x_2}\,\sqrt{a y_1 \cdot a y_1 + b y_2 \cdot b y_2}}$$

$$\langle (a x_1, b x_2), (a y_1, b y_2) \rangle \underset{C.S}{\le} \|(a x_1, b x_2)\|_2 \cdot \|(a y_1, b y_2)\|_2$$

$\iff$ Verdad

Opción 2 Como $h(x)$ es lineal cumple

que $h(\lambda x + y) = \lambda h(x) + h(y)$

Es fácil ver que es inyectiva

Sea $h(x_1, x_2) = h(y_1, y_2) \Rightarrow \begin{matrix} a x_1 = a y_1 \\ b x_2 = b y_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 \end{matrix}$

$\Rightarrow h(x) = 0 \iff x = 0$ (Pues es inyectiva)

- $F(x) = \|h(x)\|_2 \ge 0$ pues $\| \ \|_2 \ge 0$ ✓
- $F(x) = \|h(x)\|_2 = 0 \iff h(x) = 0 \iff x = 0$ ✓
- $F(\lambda x) = \|h(\lambda x)\|_2 = \|\lambda h(x)\|_2 = |\lambda| \, \|h(x)\|_2 = |\lambda| F(x)$ ✓
- $F(x+y) = \|h(x+y)\|_2 = \|h(x) + h(y)\|_2 \underset{D.T \, \| \|_2}{\le} \|h(x)\|_2 + \|h(y)\|_2 = F(x) + F(y)$ ✓

b) $H(x) = |x_1| + \sqrt[3]{x_1^3 + x_2^3}$

Notar que si $x_1 = 0 \Rightarrow H(0, x_2) = \sqrt[3]{x_2^3} = x_2$ → Podría ser negativo

$H(0,-1) = -1 \Rightarrow$ No puede ser norma

$H(1, \sqrt[3]{-2}) = 0 \rightarrow$ Otra forma de ver que no es norma

c) $G(y) = \sqrt{|y_1| + |y_2| + |y_3|}$

Notar que $G(y) = \sqrt{\|y\|_1}$

- $G(y) \geq 0$ Pues $\sqrt{\ } \geq 0$ y $\|y\|_1 \geq 0$ (Bien definida)
- $G(y) = 0 = \sqrt{\|y\|_1} \Leftrightarrow 0 = \|y\|_1 \Leftrightarrow y = \vec{0}$
- $G(\lambda y) = \sqrt{\|\lambda y\|_1} = \sqrt{|\lambda| \|y\|_1} = \sqrt{|\lambda|}\sqrt{\|y\|_1} = \sqrt{|\lambda|}\, G(y)$?

$G(1,1,1) = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$ RATO

$G(2 \cdot (1,1,1)) = \sqrt{2+2+2} = \sqrt{6}$

$\boxed{\text{No lo cumple. No es norma}}$

- $G(x+y) = \sqrt{\|x+y\|_1}$

$\|x+y\|_1 \leq \|x\|_1 + \|y\|_1 \leq \|x\|_1 + \|y\|_1 + 2\sqrt{\|x\|_1}\sqrt{\|y\|_1} = \left(\sqrt{\|x\|_1} + \sqrt{\|y\|_1}\right)^2$

$\Leftrightarrow \sqrt{\|x+y\|_1} \leq \sqrt{\|x\|_1} + \sqrt{\|y\|_1} \Rightarrow G(x+y) \leq G(x) + G(y)$

d) $J(v) = N_1(v) + N_2(v)$

- $J(v) \geq N_1(v) \geq 0$ ✓

- $\begin{cases} J(v) = 0 \Rightarrow N_1(v) = -N_2(v) \leq 0 \Rightarrow N_1(v) = 0 \Rightarrow v = 0 \\ J(0) = N_1(0) + N_2(0) = 0 + 0 = 0 \end{cases}$

- $J(\lambda v) = N_1(\lambda v) + N_2(\lambda v) = |\lambda| N_1(v) + |\lambda| N_2(v)$

$= |\lambda| \left(N_1(v) + N_2(v) \right) = |\lambda| J(v)$

- $J(x+y) = N_1(x+y) + N_2(x+y) \leq N_1(x) + N_1(y) + N_2(x) + N_2(y)$

$\leq \underbrace{\left(N_1(x) + N_2(x)\right)}_{J(x)} + \underbrace{N_1(y) + N_2(y)}_{J(y)}$

$\boxed{P2}$ $\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq N} |x_i| = \max_{1\leq i\leq N} \left(|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\max_{1\leq i\leq N} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

$\Rightarrow \|x\|_\infty^p = \max_{1\leq i\leq N} |x_i|^p \leq \sum_{i=1}^{N} |x_i|^p$

$\Rightarrow \|x\|_\infty \leq 1 \cdot \|x\|_p$

Por otro lado $|x_i| \leq \max_{1\leq i\leq N} |x_i| \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}$

$$\Rightarrow \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{N} \|x\|_\infty^{\,p}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left(N \cdot \|x\|_\infty^{\,p}\right)^{\frac{1}{p}}$$

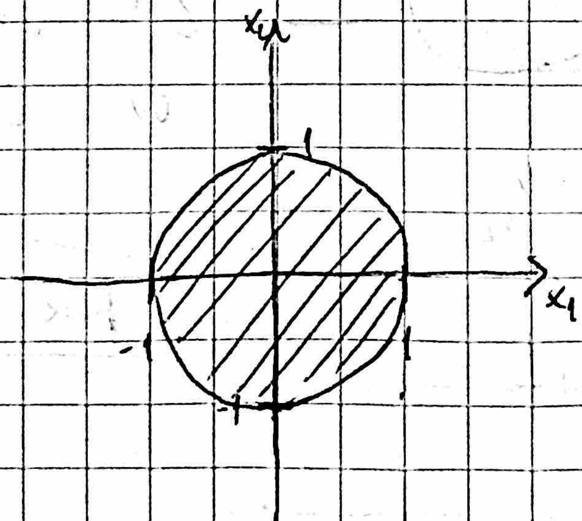
$$\leq N^{\frac{1}{p}} \cdot \|x\|_\infty$$

(N es un número finito ∴ No hay problema)

$\boxed{P3}$ $$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^N : \|x - x_0\| < r\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R}^N : d(x, x_0) < r\}$$

Graficas en $\mathbb{R}^2$

$\| \ \|_2$

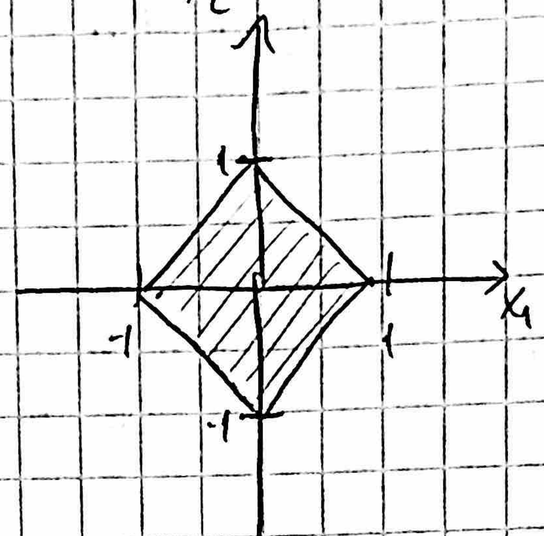


$B(0,1) \Leftrightarrow \|x\|_2 < r$

$\boxed{x_1^2 + x_2^2 < r}$

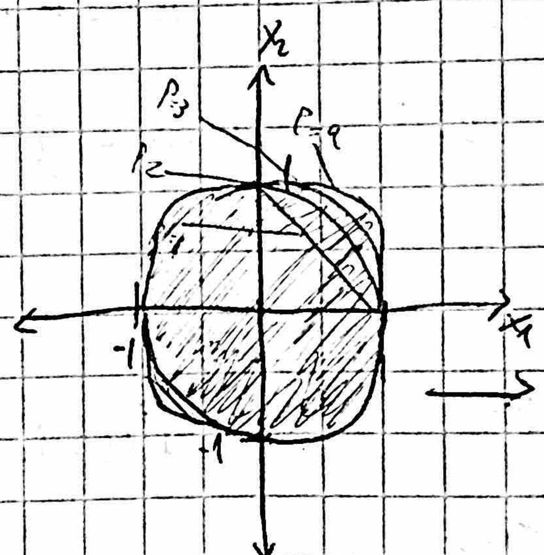
$\| \|_1$

$$\boxed{|x_1| + |x_2| < 1}$$



$\| \|_p$

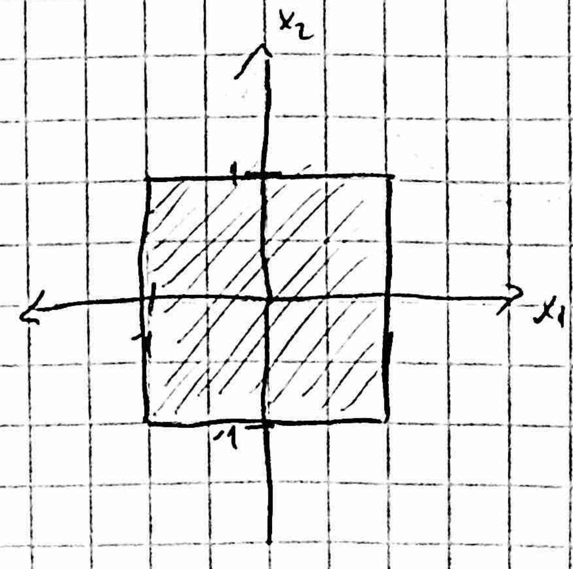
$$\boxed{|x_1|^p + |x_2|^p < 1}$$



$\longrightarrow$ Cada vez parece más un cuadrado con $p \nearrow$

$\| \|_\infty$

$$\boxed{\max\{|x_1|, |x_2|\} < 1}$$



Bonus Usando la distancia $d(x,y) = \begin{cases} x = y & 0 \\ x \neq y & 1 \end{cases}$

en $\mathbb{R}$

$B(x_0, r)$ con $r < 1$ $\Leftrightarrow$ $\{x \in \mathbb{R} : \underset{x = x_0}{\overset{d(x,x_0) < r}{\Leftrightarrow}}\} = \{x_0\}$

con $r \geq 1$ $\Leftrightarrow$ $\left\{x \in \mathbb{R} : \begin{array}{l} d(x,x_0) < r \\ \Rightarrow x \in \mathbb{R} \end{array}\right\} = \mathbb{R}$

Las Bolas de la norma p son iguales en $\mathbb{R}$

OBS: Hay bolas abiertas que son iguales a bolas cerradas

Como en con $r < 1$