MA2001-7 Cálculo en Varias Variables
Profesor: Ariel Perez Contreras
Auxiliar: Vicente Salinas
Dudas: vicentesalinas@ing.uchile.cl

Auxiliar 4: Continuidad

31 de marzo de 2022

P1. Estudie los siguientes límites:

a) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2yz}{x^4+x^2y^2+z^4}$

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}$

c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} y^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, con $y_0 \neq 0$

d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{ln(1+(x-1)^2+y^2)+(x-1)^3+y^3}{x^2+y^2-2x+1}$

P2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^3}{(x^2+y^2)^\alpha} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Demuestre que para $\alpha < 3$ f es continua para todo $\mathbb{R}^2$.

b) Muestre que f no es continua para $\alpha \geq 3$.

c) Sea $A = \left\{ \dfrac{x^3y^3}{x^2+y^2} > 1 \right\}$. Muestre que A es un conjunto abierto.

P3. Sea $R = \{(x,y)R^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ y el sistema de ecuaciones

$$(E) \begin{cases} -2x + sen(y) = 0 \\ 3 + e^{-x^2} - 6y = 0 \end{cases}$$

Demuestre que (E) tiene solución única en R. **Indicación:** Utilice el Teorema del Punto Fijo de Banach.

P4. Sea $f : R^n \to R$ continua tal que

$$\forall L \in R, \exists M \in R \text{ tal que } \|x\| \geq M \Rightarrow f(x) \geq L$$

Para $\lambda \in R$ se define $S_\lambda := \{x \in R^n : f(x) \leq \lambda\}$. Pruebe que:

a) S_λ es cerrado

b) S_λ es acotado

Propuestos

P1. Sea $f : B(0,1) \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una función continua, suponga que existen $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^N$ tales que: $f(x_0) < 0 < f(x_1)$. Demuestre que existe un punto $\overline{x} \in B(0,1)$ tal que $f(\overline{x}) = 0$.
(Use el teorema de los valores intermedios para una función continua $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ adecuada).

P2. Estudie la continuidad de la siguiente función:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\cos(y) - y\cos(x) - x + y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Indicación: $\displaystyle\lim_{z\to 0} \frac{\cos(z)-1}{z} = 0$

Resumen

- **[Conjuntos compactos]**: Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ se dice que es compacto si para toda sucesión $x_n \subset A$, x_n tiene una subsucesión convergente a un punto en A.
- **[Caracterización conjuntos compactos en** $\mathbb{R}^n$**]**: $A \subset \mathbb{R}^n$ es compacto *ssi* es un conjunto cerrado y acotado.
- Sea $f(x) : \Omega \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, entonces f se puede reescribir por componentes como:

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_N(x))$$

Con f_i una función definida de $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$

Continuidad de Funciones

Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ y $x_0 \in \Omega$, f se dice continua en x_0 si:

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)$ tal que $\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon \iff f(B(x_0,\delta)) \subseteq B(f(x_0),\varepsilon)$

$\displaystyle\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

$\displaystyle\lim_{x\to x_0} f_i(x) = f_i(x_0), \ \forall i \in \{1,2..,M\}$ y $f(x_0) = (f_1(x_0), f_2(x_0), .., f_M(x_0))$

Propiedades: Sea $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ continua, se tiene que:

1. Si $A \subseteq \mathbb{R}^N$ cerrado, entonces $f^{-1}(A)$ es cerrado.
2. Si $A \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto, entonces $f^{-1}(A)$ es abierto.

Límites de Funciones

- Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ y $a \in \Omega$ un punto de acumulación, entonces se dice que $L \in \mathbb{R}^M$ es límite de f cuando x tiende a a. (las siguientes definiciones son equivalentes).

$$\begin{gathered} (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) \text{ tal que } \|x-a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - L\| < \varepsilon \\ \lim_{x\to a} f(x) = L \iff \lim_{x\to a} f_i(x) = L_i, \forall i \in \{1,2..,M\} \text{ y } L = (L_1, L_2, .., L_M) \\ (\forall \{x_k\} \subseteq \Omega) \text{ tal que } x_k \neq a, x_k \to a \Rightarrow \lim_{k\to\infty} f(x_k) = L \end{gathered}$$

Nota: El límite de funciones de $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ en caso de existir es único.
Nota: El Teorema del Sandwich se cumple para funciones a valores en $\mathbb{R}$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \ell \iff \lim_{(\rho,\theta)\to(0,\overline{\theta})} f(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta)) = \ell, \qquad \forall \overline{\theta} \in [0, 2\pi]$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \ell \Rightarrow \left(\lim_{x\to x_0} \lim_{y\to y_o} f(x,y) = \ell \quad \vee \quad \nexists \right) \wedge \left(\lim_{y\to y_0} \lim_{x\to x_o} f(x,y) = \ell \ \vee \ \nexists \right)$$

$\boxed{P1}$ a) Tomando

<u>Sucesión 1</u>

$$(x_n, y_n, z_n) = (0, 0, \tfrac{1}{n}) \longrightarrow (0,0,0)$$

$$\Rightarrow \frac{0^2 \cdot 0 \cdot \frac{1}{n}}{0^4 + 0^2 \cdot 0^2 + \frac{1}{n}^4} = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

<u>Sucesión 2</u>

$$(x_n, y_n, z_n) = (\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}) \longrightarrow (0,0,0)$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{n}^4}{\frac{1}{n}^4 + \frac{1}{n}^4 + \frac{1}{n^4}} = \frac{1}{3} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{3}$$

$\Rightarrow \cancel{\exists L}$ Pues tiene que ser único

b) Como

$$(x-y)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+y^2 \geq 2xy$$
$$(x+y)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+y^2 \geq -2xy$$

$$\Rightarrow x^2+y^2 \geq 2|xy| \Rightarrow 1 \geq \frac{1}{2} \geq \frac{|xy|}{|x^2+y^2|}$$ $\circledast$

$$\left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{|xy|}{x^2+y^2}\cdot|y| \overset{*}{\leq} |y|$$

Usando que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = 0$$

c) $\boxed{\text{Obs: Si } y_0 = 0 \text{ el límite existe}}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} y^2 = \lim_{y\to y_0} y^2 = y_0^2$$

$\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ explota en $x=0$, pues oscila entre -1 y 1

Notemos que $a_n = \dfrac{1}{2n\pi} \longrightarrow 0$

$$\sin\left(\frac{1}{a_n}\right) = \sin(2n\pi) = 0 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$b_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \longrightarrow 0$$

$$\sin\left(\frac{1}{b_n}\right) = \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \to 1$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ No existe

Juntando esto

Sea $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{2n\pi}, y_0\right) \longrightarrow (0, y_0)$

$$y_n^2 \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = y_0^2 \sin(2n\pi) = 0$$

Sea $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}, y_0\right) \to (0, y_0)$

$$y_n^2 \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = y_0^2 \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = y_0^2$$

$\Rightarrow$ Límite no existe, pues es único

d) $$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(1+(x-1)^2+y^2) + (x-1)^3 + y^3}{(x-1)^2 + y^2}$$

Primero hacer el cambio $z = x-1$

$\Rightarrow z \to 0$

$$\lim_{(z,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1+z^2+y^2) + z^3 + y^3}{z^2 + y^2}$$

Vamos a probar que es la suma de 2 límites, esto solo sirve si ambos convergen

ES UNA APUESTA.

Usaremos la Técnica de polares

Usar $x = \rho \cos \theta$

$y = \rho \sin \theta$

y hacer $\rho \to 0$, si da independiente
$\theta \to \bar{\theta}$

de $\bar{\theta}$ $\Rightarrow$ el límite existe

y si depende de $\bar{\theta}$ o es ∞

$\Rightarrow$ No existe, para hacer el contraejemplo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{(\rho,\theta)\to(0,\bar{\theta})} \frac{\ln(1+\rho^2)}{\rho^2}$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{\ln(1+\rho^2)}{\rho^2}$$

$$= 1$$

, pues es un límite real

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| = \lim_{(\rho,\theta)\to(0,\bar{\theta})} \left|\frac{\rho^{\cancel{3}}(\cos(\theta)+\sin(\theta))}{\cancel{\rho^2}}\right|$$

$$= \lim_{(\rho,\theta)\to(0,\bar{\theta})} |\rho(\cos(\theta)+\sin(\theta))|$$

$$\leq \lim_{(\rho,\theta)\to(0,\bar{\theta})} |\rho|\cdot 2 = \lim_{\rho\to 0} |\rho|\cdot 2 = 0$$

$\Rightarrow$ El primero converge a 1

y el segundo a 0.

$\Rightarrow$ Converge a $\underline{1}$

$\boxed{P2}$ a) Usando alg de continuas, se tiene

que x^3y^3 es continua en $\mathbb{R}^2$

$\frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}$ es continua en $\mathbb{R}^2 - \{x^2+y^2=0\}$
$\Leftrightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

$\Rightarrow f(x,y)$ es continua en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

Para el $(0,0)$, vamos a probar que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{x^3 y^3}{(x^2+y^2)^{\alpha}} \right|$$

$$= \lim_{(\rho,\theta)\to(0,\bar{\theta})} \left| \frac{\rho^6 \cos(\theta) \sin(\theta)}{\rho^{2\cdot\alpha}} \right|$$

$$\leq \lim_{(\rho,\theta)\to(0,\bar{\theta})} |\rho^{2(3-\alpha)}| \cdot 1$$

$$= \lim_{\rho\to 0} |\rho^{2(3-\alpha)}| = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 \Rightarrow \text{Es continua en } \mathbb{R}^2$$

b) Notemos que para la continuidad en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ no usamos que

$\alpha < 3 \Rightarrow$ Seguirá siendolo

Hay que buscar un problema en $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

Sea $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \to (0,0)$

$$f(x_n, y_n) = \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^6}{\left(\frac{2}{n}\right)^{2\alpha}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2\alpha} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{6-2\alpha}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{2\alpha} \cdot n^{2(\alpha-3)}$$

Como $\alpha - 3 \geq 0$

$$\Rightarrow f(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ No existe, pues para una sucesión se va a ∞

$\Rightarrow$ No es continua en $(0,0)$

c) $$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} > 1 \right\}$$

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; f(x,y) > 1 \right\}$$

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; f(x,y) \in (1,\infty) \right\}$$

$$A = f^{-1}\left((1,\infty) \right)$$

Preimagen de un abierto con f continua es Abierto. $\Rightarrow$ $\underline{A \text{ es Abierto}}$

$\boxed{P3}$

$$(E)\begin{cases} \dfrac{\sin(y)}{2} = x \\[2mm] \dfrac{3+e^{-x^2}}{6} = y \end{cases}$$

Encontrar una solución $(\bar{x},\bar{y})$ es equivalente a encontrar un punto fijo de $T(x,y) = \left(\dfrac{\sin(y)}{2}, \dfrac{3+e^{-x^2}}{6} \right)$

$$\|T(x_1,y_1) - T(x_2,y_2)\| = \left\| \left(\frac{\sin(y_1)-\sin(y_2)}{2}, \frac{e^{-x_1^2}-e^{-x_2^2}}{6} \right) \right\|$$
$$\leq \frac{|\sin(y_1)-\sin(y_2)|}{2} + \frac{|e^{-x_1^2}-e^{-x_2^2}|}{6}$$

Por Teorema del Valor Medio

$$\sin(y_1) - \sin(y_2) = \cos(\xi)(y_1 - y_2)$$

$$\Rightarrow |\sin(y_1) - \sin(y_2)| \leq |y_1 - y_2| \cdot \underline{1}$$

$$e^{-x_1^2} - e^{-x_2^2} = e^{-\xi^2}(-2\xi)(x_1 - x_2)$$

$$\Rightarrow |e^{-x_1^2} - e^{-x_2^2}| \leq 1 \cdot 2|\xi| \, |x_1 - x_2|$$

Con $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in R = B_{\|\|_\infty}(0,1)$

$\xi \in [x_1, x_2)$ o $[x_2, x_1]$

$\Rightarrow \xi = x_1\lambda + (1-\lambda)x_2$ con $\lambda \in [0,1]$

$$|\xi| \leq \lambda |x_1| + (1-\lambda)|x_2| = \lambda + (1-\lambda) = 1$$

$$\Rightarrow \left|e^{-x_1^2} - e^{-x_2^2}\right| \leq \frac{1 \cdot 2}{2} \cdot |x_1 - x_2|$$

$$\Rightarrow \left|T(x_1,y_1) - T(x_2,y_2)\right| \leq \frac{1}{2}|y_1 - y_2| + \frac{1}{3}|x_1 - x_2|$$

$$\leq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \operatorname{Max}\{|y_1 - y_2|, |x_1 - x_2|\}$$

$$\|T(x_1,y_1) - T(x_2,y_2)\|_\infty \leq \frac{5}{6}\|(x_1,y_1) - (x_2,y_2)\|_\infty$$

$\Rightarrow T$ es contractante

Como $R = B_{\|\|_\infty}(1,1)$ es compacto

pues es cerrado y acotado

$\Rightarrow T$ tiene un único punto fijo en R

$\Rightarrow$ Tiene una única solución en $\mathbb{R}$

$\boxed{P4}$ a) $S_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \in (-\infty, \lambda]\}$

$$S_\lambda = f^{-1}((-\infty, \lambda])$$

Preimage a traves de continua de cerrado es cerrado $\Rightarrow$ S_λ cerrado

b) Usando la Contrarreciproca de la hipotesis es

$\forall L \in \mathbb{R}, \exists M_{>0}$ tal que $f(x) < L \Rightarrow \|x\| < M$

$\Rightarrow$ Sea $\lambda + 1 \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $f(x) < \lambda + 1 \Rightarrow \|x\| < M$

Sea $x \in S_\lambda \Rightarrow f(x) \leq \lambda < \lambda + 1$

$\Rightarrow \exists M \in \mathbb{R}$ tal que $\|x\| < M$

Como x es arbitrario $\Rightarrow S_\lambda$ es Acotado

$\Rightarrow S_\lambda$ Compacto

Propuesta 1

Sea $g : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$g(\lambda) = f(\lambda x_0 + (1-\lambda) x_1)$$

Probemos que $g(\lambda)$ es continua

$$f(\lambda x_0 + (1-\lambda) x_1) = f(w)$$

$$|w| \leq \lambda |x_0| + (1-\lambda) |x_1| \leq \lambda + (1-\lambda) = 1$$

$\Rightarrow \lambda x_0 + (1-\lambda) x_1 \in B(0,1) \quad , \forall \lambda \in [0,1]$

$\Rightarrow f(w)$ es continua por hipotesis

$\Rightarrow g(\lambda)$ es continua, por igualdad de funciones

Como $g(0) < 0$ y $g(1) > 0$

Por TVI $\Rightarrow \exists \hat{\lambda} \in [0,1] \quad g(\hat{\lambda}) = 0$

$$\Rightarrow f(\hat{\lambda} x_0 + (1-\hat{\lambda}) x_1) = 0$$

$$f(\tilde{x}) = 0$$

$$\bar{X} = \tilde{\lambda} X_0 + (1-\tilde{\lambda}) X_1 \in B(0,1)$$

Propuesta 2

Mirando la indicación, es raro pues el denominador no es de la forma, por lo que hay que hacer un truquito

Para $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ por Alg de continua

$f(x,y)$ es continua, pues $x^2+y^2 \neq 0$

Para $(x,y) = (0,0)$

$$\boxed{\text{Veamos si } \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0\,?}$$

$$f(x,y) = \frac{x(\cos(y)-1) - y(\cos(x)-1)}{x^2y^2}$$

$$= \frac{xy}{x^2+y^2}\left[\frac{\cos(y)-1}{y} - \frac{\cos(x)-1}{x}\right]$$

Notemos que

$$\lim_{y\to 0} \frac{\cos(y)-1}{y} = 0 = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x}$$

$$\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{1}{2} \quad \text{por } (*)$$

Con todo esto, <u>idea</u> $\lim = 0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right| \left| \frac{\cos(y)-1}{y} + \left(-\left(\frac{\cos(x)-1}{x}\right)\right)\right|$$

$$\leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{2} \cdot \left|\left(\frac{\cos(y)-1}{y}\right) + \left(-\left(\frac{\cos(x)-1}{x}\right)\right)\right|$$

$$\leq \frac{1}{2}\left[\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{\cos(y)-1}{y}\right| + \left|\frac{\cos(x)-1}{x}\right|\right]$$

$$\leq \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \underbrace{\left|\frac{\cos(x)-1}{x}\right|}_{\to 0} + \lim_{y\to 0} \underbrace{\left|\frac{\cos(y)-1}{y}\right|}_{\to 0}$$

$$\leq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

Con lo que se concluye que es continua