

MA2001-7 Cálculo en Varias Variables**Profesor:** Ariel Perez Contreras**Auxiliar:** Vicente Salinas**Dudas:** vicentesalinas@ing.uchile.cl**Auxiliar 5: Diferenciabilidad y Derivabilidad**

14 de abril de 2022

P1. Calcule los diferenciales, derivadas direcciones y derivadas parciales:

a) $f(x, y) = (x, y)$

c) $h(u, v) = z^3 e^x \cos(y)$

b) $g(w, z) = (we^z + \cos(z), w \cosh(z), \sin(w) + e^z)$

d) $i(x_1, x_2, \dots, x_n) = \|x\|^2$

P2. Sea $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ y $c \in \mathbb{R}$. Considere la función:

$$f(x) = \langle x, Ax \rangle + \langle b, x \rangle + c$$

$$g(x) = \langle x, Ax \rangle \langle b, x \rangle c$$

Estudie las diferenciabilidades de las funciones y calcule $Df(x)$ y $Dg(x)$.**P3.** Considere la función:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ \alpha & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

a) Calcule α para que f sea continua. Luego utilice este valor.b) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$, para todo $\mathbb{R}^2$.c) Concluya que f es diferenciable.

d) Calcule las derivadas direccionales.

Resumen

- **[Función diferenciable]:** Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es aquella que:
 , donde A es un conjunto abierto, se dice que la función f es diferenciable en un punto x_0 si existe una aplicación lineal denotada por $Df(x_0)$ tal que:

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - Df(x_0)h\|}{\|h\|} = 0$$

Esto es equivalente a que, en pequeñas variaciones de mi función, puedo aproximarla linealmente cometiendo un error proporcional a $O(\|h\|^2)$.

Observación: esta aplicación lineal es única. Si la función es diferenciable por coordenadas, entonces f es diferenciable.

- **[Diferenciable implica continua]:** Si la función f es diferenciable en el punto x_0 , entonces es continua en dicho punto.

- **[Derivada Parcial]** Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Definimos la derivada parcial de f en $x_0 \in A$, con respecto a la i -ésima variable por

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + he_i) - f(x_0)}{h}$$

donde e_i es el i -ésimo vector de la base canónica.

Obs: Esto sirve para estudiar el cambio en la dirección x_i , ignorando las restantes.

- **Teorema : (Valor medio)** Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, A abierto, $\bar{O}, y \in A$ tal que el segmento que une a x e y está contenida en A . Si f es diferenciable en cada punto del segmento, entonces existe c en el segmento, tal que:

$$f(x) - f(y) = Df(c)(x - y)$$

- **Teorema :** Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $a \in A$. Consideremos $F : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ con $F = (f_1, f_2, \dots, f_m)$. La matriz de $DF(a)$ respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ llamada matriz Jacobiana y denotada por $F'(a)$

$$F'(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

Obs: Con esto es fácil ver que $DF_i(a)e_j = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$

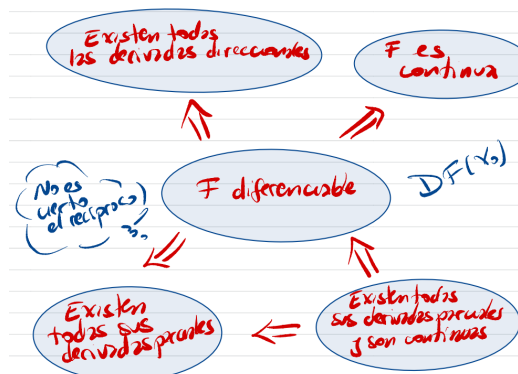
Obs2: Diferenciable implica Derivable.

Definición: Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, A abierto, $\sigma \in \mathbb{R}^n$, Se llama derivada direccional de f en el punto $x_0 \in A$ y la dirección σ :

$$D_\sigma f(x_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h\sigma) - f(x_0)}{h}$$

Obs: La i -ésima derivada parcial es la derivada direccional en la dirección $\sigma = e_i$

- **Teorema :** Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $x_0 \in A$. Si todas las derivadas parciales en x_0 son continuas, entonces $F : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ es diferenciable en x_0 .



- Sean f y g funciones $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciables en x_0 entonces:

$$D(f + g)(x_0) = Df(x_0) + Dg(x_0)$$

$$D(fg)(x_0) = f(x_0)Dg(x_0) + g(x_0)Df(x_0)$$

Propuestos

Prop 1. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^N$ y sea $x_0 \in \mathbb{R}^N \setminus A$ fijo, se define $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ como:

$$f(x) = \|x - x_0\|$$

- a) Demuestre que f es continua

b) Pruebe que $\inf_{x \in A} f(x) > 0$

Prop 2. Sea $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Tal que sus derivadas parciales satisfacen que: $\left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \leq K$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$. Pruebe que $|f(x) - f(y)| \leq \sqrt{n}K\|x - y\|_2$.