P1

(a) Calcular $\int_\Gamma F \cdot d\vec{r}$ para

$$F(x,y,z) = (x-z,\ z-y,\ x-y) \quad y$$

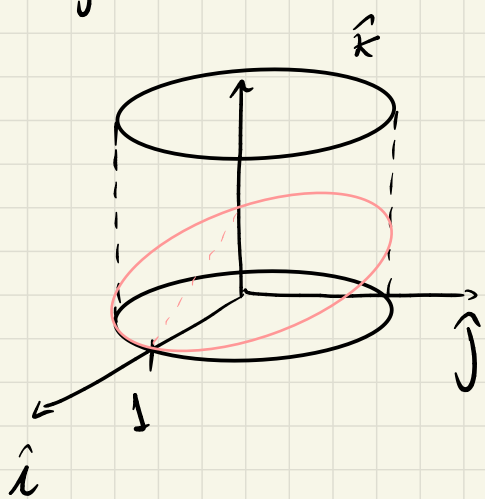
$$\Gamma = \{x^2+y^2=1,\ z\in\mathbb{R}\} \cap \{z+x=1,\ y\in\mathbb{R}\}$$

Solución

Usamos la definición de integral de Trabajo:

$$\int_\Gamma F\cdot d\vec{r} = \int_a^b F(\vec{r}(t))\cdot \frac{d\vec{r}}{dt}(t)\ . \qquad (1)$$

Dibujamos Γ:

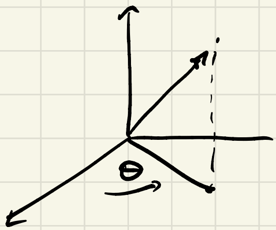


$y=0 \Rightarrow x = \pm 1$

El dibujo nos sugiere usar cilíndricas

La idea es dejar todo en función de una sola variable, que en este caso será θ.

$(\rho, \theta, z) \longrightarrow (\rho\cos\theta, \rho\,\text{sen}\,\theta, z)$



De la def de Γ vemos que

$$\rho = 1$$

y además

$$z = 1 - x = 1 - \cos\theta .$$

Así, Γ queda parametrizado por

$$\vec{r} : [0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\theta \longmapsto (\cos\theta, \text{sen}\,\theta, 1 - \cos\theta)$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{r}}{d\theta}(\theta) = (-\text{sen}\,\theta, \cos\theta, \text{sen}\,\theta).$$

Por otro lado,

$$F(\vec{r}(\theta)) = \begin{pmatrix} \cos\theta - (1 - \cos\theta) \\ 1 - \cos\theta - \text{sen}\,\theta \\ \cos\theta - \text{sen}\,\theta \end{pmatrix}.$$

Entonces,

$$\int_\Gamma F \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 2\cos\theta - 1 \\ 1 - \cos\theta - \text{sen}\,\theta \\ \cos\theta - \text{sen}\,\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\text{sen}\,\theta \\ \cos\theta \\ \text{sen}\,\theta \end{pmatrix} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[-(2\cos\theta - 1)\operatorname{sen}\theta + (1 - \cos\theta - \operatorname{sen}\theta)\cos\theta + (\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta \right] d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[-2\cos\theta \operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\theta + \cos\theta \underbrace{- \cos^2\theta - \cancel{\operatorname{sen}\theta\cos\theta} + \cancel{\cos\theta\operatorname{sen}\theta} - \operatorname{sen}^2\theta}_{-1} \right] d\theta$$

$$= 2\int_0^{2\pi} (-\cos\theta\operatorname{sen}\theta)\, d\theta + \underbrace{\cancel{\int_0^{2\pi} (\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)\, d\theta}}_{\to\ 0 \text{, por periodicidad}} - 2\pi .$$

$$= 2\left.\frac{\cos^2\theta}{2}\right|_0^{2\pi} - 2\pi = -2\pi$$

$$\boxed{\int_\Gamma F \cdot d\vec{r} = -2\pi}$$

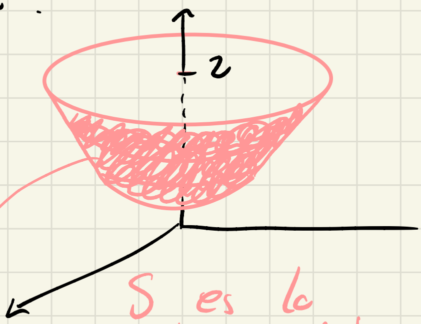
(b) $S = \{ z^2 = x^2 + y^2 ,\ z \in [1,2] \}$,

$F = \hat{\imath}\, x + \hat{\jmath}\, y + \hat{k}\, z^2$

Calcule $\displaystyle\int_S F \cdot d\vec{A}$.

Solución

$z = \sqrt{x^2+y^2}$ nos dice que el radio aumenta linealmente con la altura z.



S es la envoltura del cono truncado

Dado la def de S,

$z = \sqrt{x^2+y^2} = \rho$.

Luego, S queda parametrizada por

$$\vec{r} : [0, 2\pi) \times [1,2] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(\theta, z) \longmapsto (z\cos\theta,\ z\,\text{sen}\,\theta,\ z)$$

Luego,

$$F(\vec{r}(\theta,z)) = \begin{pmatrix} z\cos\theta \\ z\,\text{sen}\,\theta \\ z^2 \end{pmatrix}$$

y además,

$$\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial z}\right) = \begin{pmatrix} -z\,\text{sen}\,\theta \\ z\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \text{sen}\,\theta \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -z\sin\theta & z\cos\theta & 0 \\ \cos\theta & \text{sen}\,\theta & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{\imath}\, z\cos\theta + \hat{\jmath}\, z\,\text{sen}\,\theta$$
$$+ \hat{k}\left(-z\,\text{sen}^2\theta - z\cos^2\theta\right)$$
$$= z\left(\cos\theta, \text{sen}\,\theta, -1\right)$$

Finalmente:

$$\int_S F \cdot d\vec{A} = \int_0^{2\pi}\int_1^2 z\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \text{sen}\,\theta \\ z \end{pmatrix} \cdot z\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \text{sen}\,\theta \\ -1 \end{pmatrix} dz\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_1^2 z^2\left(\underbrace{\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta}_{1} - z\right) dz\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_1^2 z^2\,dz\,d\theta - \int_0^{2\pi}\int_1^2 z^3\,dz\,d\theta$$

$$= 2\pi\left(\left.\frac{z^3}{3}\right|_1^2 - \left.\frac{z^4}{4}\right|_1^2\right) = -\frac{17}{6}\pi$$

$$\Longrightarrow \boxed{\int F \cdot d\vec{A} = -\frac{17}{6}\pi}$$

P2 (a) $F = (x^2y, 2y, x)$

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$$

$$\Gamma_1 = \begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x=0 \\ y\geq 0,\ z\geq 0 \end{cases}, \quad \Gamma_2 = \begin{cases} 2x+z=1 \\ y=0 \\ x\geq 0,\ z\geq 0 \end{cases}$$

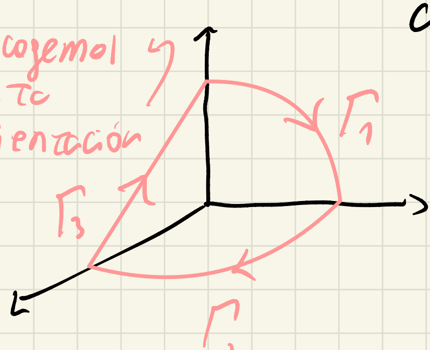
$$\Gamma_3 = \begin{cases} 4x^2+y^2=1 \\ z=0 \\ x\geq 0,\ y\geq 0 \end{cases}$$

Calcular $\displaystyle\int_\Gamma F\cdot d\vec{r}$

Solución

Calculamos $\int F\cdot d\vec{r}$ sobre cada curva por separado

Escogemos esta orientación



$$= \sum_{i=1}^{3} \underbrace{\int_{\Gamma_i} F\cdot d\vec{r}}_{I_i}$$

Γ_1 Notamos que Γ_1 corresponde a un arco de circunferencia.

$\Rightarrow$ Usamos esféricas

Γ_1 se parametriza por.

$$\vec{r}(1, \varphi, \pi/2)$$
$$= (\operatorname{sen}\varphi \cos \pi/2, \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\pi/2, \cos\varphi)$$
$$= (0, \operatorname{sen}\varphi, \cos\varphi), \quad \varphi \in [0, \pi/2]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{r}(\varphi)}{\partial \varphi} = (0, \cos\varphi, -\operatorname{sen}\varphi).$$

Por otro lado

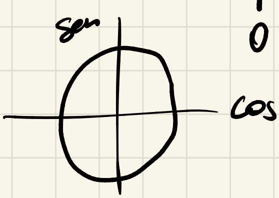
$$F(\vec{r}(\varphi)) = (0, 2\operatorname{sen}\varphi, 0)$$

Así,

$$I_1 = \int_{\Gamma_1} F \cdot d\vec{r} = \int_0^{\pi/2} \begin{pmatrix} 0 \\ 2\operatorname{sen}\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\varphi \\ -\operatorname{sen}\varphi \end{pmatrix} d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi/2} 2 \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi \, d\varphi = \operatorname{sen}^2\varphi \Big|_0^{\pi/2}$$

$$= 1$$



Γ_2 Es una recta y se parametriza por

$$\vec{r}(z) = \left(\frac{1-z}{2}, 0, z\right) \quad z \in [0, 1]$$

$$\frac{d\vec{r}}{dz} = \left(\frac{-1}{2}, 0, 1\right)$$

$$F(\vec{r}(z)) = \left(0, 0, \frac{1-z}{2}\right)$$

Entonces,

$$I_2 = \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1-z}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dz$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 (1-z)\,dz = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Γ_3 Una elipse cualquiera

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$$

se parametriza por

$$\vec{r}(t) = (a\cos t, b\,\mathrm{sen}\,t), \quad t \in [0, 2\pi)$$

Aplicando esto a Γ_3 nos queda que su parametrización es

$$\vec{r}(t) = \left(\frac{1}{2}\cos t,\ \operatorname{sen} t,\ 0\right) \qquad t \in [0, \pi/2)$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt}(t) = \left(-\frac{1}{2}\operatorname{sen} t,\ \cos t,\ 0\right)$$

$$F(\vec{r}(t)) = \left(\frac{1}{4}\cos^2 t \operatorname{sen} t,\ 2\operatorname{sen} t,\ \frac{1}{2}\cos t\right)$$

$$\Rightarrow I_3 = \int_0^{\pi/2} \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\cos^2 t \operatorname{sen} t \\ 2\operatorname{sen} t \\ \frac{1}{2}\cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\operatorname{sen} t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(-\frac{1}{8}\cos^2 t \operatorname{sen}^2 t + 2\operatorname{sen} t \cos t\right) dt$$

$$= -\frac{1}{8}\int_0^{\pi/2} (\cos t \operatorname{sen} t)^2 + 2\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} t \cos t \, dt$$

$$= -\frac{1}{8} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\operatorname{sen}(2t)}{2}\right)^2 + \operatorname{sen}^2 t \Big|_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{-1}{32}\int_0^{\pi/2} \frac{(1-\cos 4t)}{2} dt + 1$$

$$= \frac{-1}{64}\left(\pi/2 - \frac{\operatorname{sen}(4t)}{4}\Big|_0^{\pi/2} \right) + 1$$

$$= \frac{-\pi}{128} + 1 .$$ Concluimos que

$$\boxed{\int F \cdot d\vec{r} = \frac{\pi}{128} + \frac{1}{4}}$$

(b) $F = x^2 y \hat{j} + y^2 z \hat{k}$. Flujo sobre

$$S = \{4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9,\ z \geq 0\} \subset \mathbb{R}^3$$

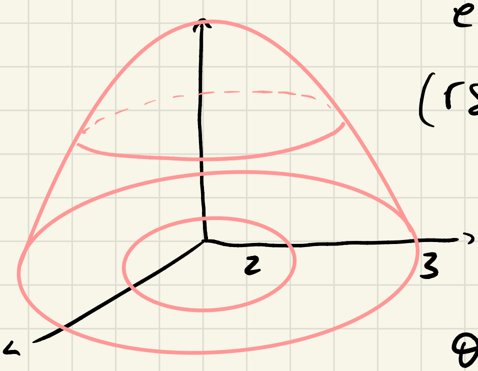
Solución.

Gauss nos dice que:

$$\int_{\partial S} F \cdot d\vec{A} = \int_{S} (\nabla \cdot F)\, dV,$$

Dada la forma de S usamos coord. esféricas

S



$(r \operatorname{sen}\varphi \cos\theta,\ r \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta,\ r\cos\varphi)$

En este caso

$r \in [2,3],\ \varphi \in [0, \pi/2]$

$\theta \in [0, 2\pi)$

La parametrización queda como

$$\vec{r}(r, \varphi, \theta) = (r \operatorname{sen}\varphi \cos\theta,\ r \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta,\ r\cos\varphi)$$

con $r \in [2,3]$, $\varphi \in [0, \pi/2]$ y $\theta \in [0, 2\pi]$

Antes de calcular divergencia en coord. esféricas, notemos que

$$(\nabla \cdot F)(x,y,z) = x^2 + y^2,$$

lo cual es una expresión mucho más sencilla de trabajar en esféricas.

$$(\nabla \cdot F)(\vec{r}(r,\varphi,\theta)) = r^2$$

Por otro lado,

$$dV = \left| \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right| dr\, d\varphi\, d\theta$$

$$= \left| (h_r \hat{r} \times h_\varphi \hat{\varphi}) \cdot h_\theta \hat{\theta} \right| dr\, d\varphi\, d\theta$$

$$= h_r h_\varphi h_\theta \, dr\, d\varphi\, d\theta$$

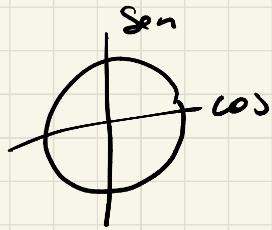
¿Esta simplificación sucede cuando la parametrización calza con un sist. de coord. ortogonales?

Finalmente

$$\int_S (\nabla \cdot F)\, dV = \int_{r=2}^{3} \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \int_{\theta=0}^{2\pi} r^2 \, 1 \cdot r \cdot r \sin\varphi \, dr\, d\varphi\, d\theta$$

$$= \int_2^3 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} r^3 \operatorname{sen}\varphi \, dr \, d\varphi \, d\theta$$

$$= 2\pi \int_2^3 r^3 \left(\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi \right) dr$$



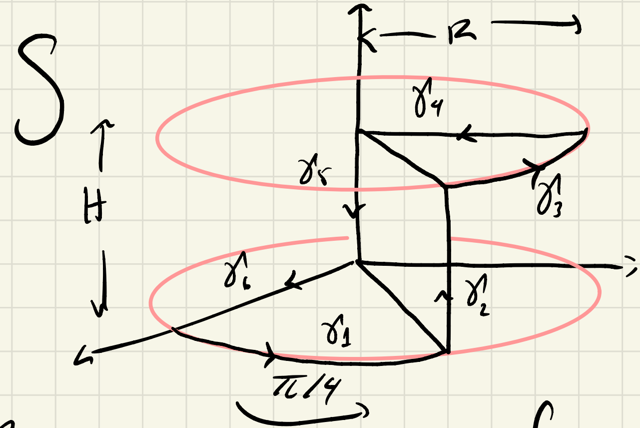
$$= 2\pi \int_2^3 r^3 \left. (-\cos\varphi) \right|_0^{\pi/2} dr$$

$$= -2\pi (0 - 1) \left(\frac{3^4 - 2^4}{4} \right)$$

$$= \frac{\pi}{2} (3^4 - 2^4)$$

$$\Rightarrow \int_{\partial S} F \cdot d\vec{A} = \frac{\pi}{2} (3^4 - 2^4)$$

P3



orientamos

$F = \rho^2 \hat{z} + z\rho\hat{\rho}$. Calcular $\int_{\partial S} F \cdot d\vec{A}$.

↳ cilíndricas

Solución

$$\int_{\Gamma} F \cdot d\vec{r} = \int_a^b F(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}(t)}{dt}\, dt$$

Dividimos la curva en secciones y calculamos la integral sobre cada una de esta.

γ_1 parametrizamos con cilíndricas

$\vec{r}(\rho, \theta, z) = (\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta, z)$

La única coord. que se mueve es θ

$\vec{r}(\theta) = (R\cos\theta, R\operatorname{sen}\theta, 0)$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/4} \underbrace{R^2 \hat{z} \cdot \hat{\theta}}_{0 \text{ pq son ortogonales.}} \, d\theta = 0$$

Observamos que cada vez que la tangente a la curva,

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial t},$$

sea perpendicular a la dirección de F, la integral de trabajo será 0.

También notamos que es conveniente parametrizar todo con cilíndricas.

	$F(\vec{r}(t))$	$\partial \vec{r}/\partial t$	variable
γ_2	$R^2 \hat{z}$	$\hat{z}$	z
γ_3	$R^2 \hat{z} + HR\hat{\rho}$	$\hat{\theta}$ $= 0$	θ
γ_4	$\rho^2 \hat{z} + H\rho\hat{\rho}$	$-\hat{\rho}$	ρ
γ_5	0	$-\hat{z}$ $= 0$	z
γ_6	$R^2 \hat{z}$	$\hat{\rho}$ $= 0$	ρ

Es decir, basta calcular en γ_2 y γ_4

Γ_2 $\quad \vec{r}(z) = (R\cos\pi/4,\ R\,\text{sen}\,\pi/4,\ z)$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial z}(z) = (0,\ 0,\ 1) = \hat{z}$$

$$F(\vec{r}(z)) = R^2\hat{z}$$

$$\Rightarrow \int_0^H R^2\hat{z}\cdot\hat{z}\,dz = R^2H.$$

Γ_4 $\quad \vec{r}(\rho) = (0,\ \rho,\ H)$

$$F(\vec{r}(\rho)) = \rho^2\hat{z} + H\rho\,\hat{\rho}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho}(\rho) = (0,\ 1,\ 0) = \hat{\rho}\ (\theta = \pi/2)$$

$$\Rightarrow \int_R^0 (\rho^2\hat{z} + H\rho\,\hat{\rho})\cdot\hat{\rho}\,d\rho$$

$$= -\int_0^R H\rho\,d\rho = -\frac{HR^2}{2}$$

Concluimos:

$$\boxed{\int_\gamma F\cdot d\vec{r} = \frac{HR^2}{2}}$$

P4 $\Delta F = (\Delta F_1, \Delta F_2, \Delta F_3)$

(a) P.d.q $\nabla \times (\nabla \times F) = \nabla(\nabla \cdot F) - \Delta F$

Este problema es sólo matraquear y hacerlo de forma ordenada.

Una buena idea es desarrollar un poco ambos lados para obtener la igualdad.

(b) Propuesto, pero si tienes algún problema no dudes en preguntarme

P5 $\vec{r}(\theta, \tau, z) = \left(\theta\tau, \frac{1}{2}(\tau^2 - \theta^2), z\right)$

(a) $h_\theta = h_\tau = \sqrt{\tau^2 + \theta^2}$, $h_z = 1$

(b) Ocupar la def: $h_u = \dfrac{\partial_u \vec{r}}{\|\partial_u \vec{r}\|}$ y

que $u, v \in \mathbb{R}^3$ son ortogonales si $u \cdot v = 0$.

(c) Propuesto