MA2002-2 Calculo Avanzado y Aplicaciones.
Profesor: Alexander Frank.
Auxiliares: Javier Castro y Javier Monreal.

Auxiliar 4

4 de Abril de 2022

P1. *a)* Considere el campo $F = (2yz^2, xz^2, 3xyz)$ y la curva delimitada por la intersección de $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ con $x^2 + y^2 = 3z$. Calcule la integral de linea correspondiente.

b) Sea S la superficie definida por $z^2 + x^2 = 1 + y^2,\ y \geq 0$ y C la curva obtenida al intersectar S con el cilindro $x^2 + y^2 = 1$. Calcular

$$\oint_C F \cdot d\vec{r},$$

con $F = \rho^2 e^{z^2} \sin^4(\theta)\hat{\rho} + (\frac{z}{r} + \theta)\hat{\theta} + (\sin(\theta) + \sqrt{1+\rho^2})\hat{z}$.

P2. Use apropiadamente el teorema de la divergencia para calcular el flujo del campo vectorial

$$F(x, y, z) = (e^z \sin(y) + xy^2 z)\hat{\imath} + (e^x \cos(z) + x^2 yz)\hat{\jmath} + (x^2 e^y)\hat{k},$$

sobre el manto del cuarto de cilindro de radio y altura π de la Figura 1, con la normal orientada hacia el exterior.

P3. Considere el campo

$$F = \frac{1}{x^2+y^2}\left[\left(x - y\sqrt{x^2+y^2}\arctan(z^2)\right)\hat{\imath} + \left(y + x\sqrt{x^2+y^2}\arctan(z^2)\right)\hat{\jmath} + z(x^2+y^2)\hat{k}\right]$$

a) Escriba F en coordenadas cilíndricas.

b) Calcule $\nabla \cdot F$.

c) Calcule el flujo de F a través de la superficie de cualquier esfera de radio $R > 0$, orientada según la normal interior a esta, que no intersecte al eje OZ.

P4. Considere el campo vectorial

$$F(x, y, z) = \left(3x^2 y - 3z + e^x \sin(z)\right)\hat{\imath} + x^2\hat{\jmath} + (e^x \cos(z) - 3z)\hat{k}.$$

a) Calcule $\nabla \times F$.

b) Considere la curva Γ parametrizada según,

$$\Gamma : \sigma(t) = (\cos(t), \sin(t), \cos(t)) \quad t \in [0, 2\pi].$$

Calcule,

$$\oint_\Gamma F \cdot d\vec{r}.$$

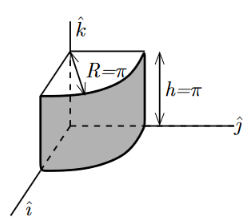

Figura 1

- Para un sistema de coordenadas curvilineas $\vec{r} = (u, v, w)$ se tiene que $h_u = \|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\|$, $h_v = \|\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\|$ y $h_w = \|\frac{\partial \vec{r}}{\partial w}\|$.
- $\hat{u} = \frac{1}{h_u}\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ y de forma análoga se define $\hat{v}$ y $\hat{w}$.
- $\nabla \cdot F = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left(\frac{\partial}{\partial_u}[F_u h_v h_w] + \frac{\partial}{\partial_v}[h_u F_v h_w] + \frac{\partial}{\partial_w}[h_u h_v F_w]\right)$
- $\nabla \times F = \frac{1}{h_u h_v h_w}\begin{vmatrix} h_u\hat{u} & h_v\hat{v} & h_w\hat{w} \\ \frac{\partial}{\partial_u} & \frac{\partial}{\partial_v} & \frac{\partial}{\partial_w} \\ F_u h_u & F_v h_v & F_w h_w \end{vmatrix}$
- Cilíndricas: $\vec{r}(\rho, \theta, z) = (\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta, z)$, $h_\rho = h_z = 1$ y $h_\theta = \rho$.
- Esféricas: $\vec{r}(r, \varphi, \theta) = (r\operatorname{sen}\varphi\cos\theta, r\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta, r\cos\varphi)$, $h_r = 1$, $h_\varphi = r$ y $h_\theta = r\operatorname{sen}\varphi$.
- (**Integral de flujo**) Sea S una superficie regular orientable,

  $$\int_S F \cdot d\vec{A} = \int_D F(\vec{r}(u,v)) \cdot \left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u,v)\right] dudv,$$

  donde $\vec{r}\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es una parametrización regular de S compatible con la orientación.
- $dV = |(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}) \cdot (\frac{\partial \vec{r}}{\partial w})| dudvdw.$
- (**Integral de trabajo o línea**) Sea Γ una curva simple y regular,

  $$\int_\Gamma F \cdot d\vec{r} = \int_a^b F(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}(t)dt,$$

  donde $\vec{r}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ es una parametrización regular de Γ.
- (**Teorema de Gauss**) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ abierto, acotado y cuya frontera $\partial\Omega$ es una superficie regular por pedazos orientada según la normal exterior. Sea F campo $\mathcal{C}^1$. Entonces,

  $$\int_{\partial\Omega} F \cdot d\vec{A} = \int_\Omega (\nabla \cdot F) dV.$$

- (**Teorema de Stokes**) Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientable y regular por pedazos, cuyo borde ∂S es una curva cerrada, simple y regular por pedazos. Sea también F un campo $\mathcal{C}^1$. Entonces,

  $$\int_{\partial S} F \cdot d\vec{r} = \int_S (\nabla \times F) \cdot d\vec{A}.$$