

MA3403-3. Probabilidades y Estadística.**Profesor:** Servet Martínez.**Auxiliar:** Sebastián López.**Fecha:** Jueves 02 de Junio, 2022.**Auxiliar 11: Repaso C2.****Problemas**

P1. En todo momento un matemático fumador de pipa porta dos cajas de fósforos: una en su bolsillo derecho y la otra en su bolsillo izquierdo. Cada vez que necesita un fósforo elige un bolsillo al azar (ambos con igual probabilidad) y saca un fósforo de la caja que está en el bolsillo elegido. Considere el momento en que el matemático descubre por primera vez que una de las cajas está vacía. Si se sabe que ambas cajas contenían inicialmente N fósforos: ¿Cuál es la probabilidad de que queden exactamente $k \in \{0, 1, \dots, N\}$ fósforos en la otra caja?

P2. Sea $X_1 \sim \text{Uniforme}(0, 1)$, y defina $X_2 := \sqrt{X_1}$. Encuentre la densidad de X_2 .

P3. Sean X, Y v.a.'s absolutamente continuas con funciones de distribución $F_X = F, F_Y = G$.

a) Pruebe que $\mathbb{E}(G(X) + F(Y)) = 1$.

b) Pruebe que $\mathbb{E}(F(X)) = 1/2$.

P4. Sean X_1, \dots, X_n v.a. independientes tales que $X_i \sim \chi_1^2$, distribuye como una chi-cuadrado con un grado de libertad. Muestre que:

$$\sum_{i=1}^n X_i \sim \chi_n^2$$

es decir, la suma de las v.a. X_i distribuye chi-cuadrado con n grados de libertad.

P5. Sean $(X_j)_{j=1}^n$ v.a. independientes tales que $X_j \sim \mathcal{N}(\mu_j, \sigma_j^2)$. Muestre que:

$$\sum_{j=1}^n X_j \sim \mathcal{N}\left(\sum_{j=1}^n \mu_j, \sum_{j=1}^n \sigma_j^2\right).$$

Hint: Recuerde que $\varphi_{X_j}(t) = e^{i\mu_j t} e^{-\frac{t^2 \sigma_j^2}{2}}$.