MA3403-3. Probabilidades y Estadística.
Profesor: Servet Martínez.
Auxiliar: Sebastián López.
Fecha: Jueves 16 de Junio, 2022.

Auxiliar 13: Condicional y covarianza.

Resumen

- **Teo. Cambio de Variable multidimensional.** Sea (X,Y) vc.a. con densidad conjunta $f_{X,Y}$. Sea $(U,V)=h(X,Y)$, tal que h es a derivada continua y Jacobiano distinto de 0:
$$f_{U,V}(u,v)=\sum_{x,y\in h^{-1}(u,v)}|\det(J_h(x,y)|^{-1}f_{X,Y}(x,y)$$
Si además h es inyectiva:
$$\begin{aligned}f_{U,V}(u,v)&=|\det(J_h(h^{-1}(u,v))|^{-1}f_{X,Y}(h^{-1}(u,v))\\&=|\det(J_{h^{-1}}(u,v))|f_{X,Y}(h^{-1}(u,v)).\end{aligned}$$
- Función de **densidad condicional** de X en x, dado $Y=y$:
$$f_{X|Y}(x|y):=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}.$$
- **Esperanza Condicional**
$$\mathbb{E}(g(X)|Y=y):=\int g(x)f_{X|Y}(x|y)dx.$$
- Se define la v.a. esperanza condicional de $g(X)$ dado Y, como $\mathbb{E}(g(X)|Y)(\omega):=\mathbb{E}(g(X)|Y=Y(\omega))$.
- $\mathbb{E}(g(X))=\mathbb{E}(\mathbb{E}(g(X)|Y))$.
- **Covarianza**: $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.
- $\mathrm{Cov}(\alpha+\beta X,\gamma+\delta Y)=\beta\delta\mathrm{Cov}(X,Y)$.
- $\mathrm{Var}(X+Y)=\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)+2\mathrm{Cov}(X,Y)$.
- **Correlación** $\mathrm{Corr}(X,Y)=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}}$.
- Para $\vec{X}=(X_1,\dots,X_n)$, se tiene $\vec{\mu}=\mathbb{E}(\vec{X})$ y su matriz de covarianza
$$\mathrm{Cov}(\vec{X})=\mathbb{E}((\vec{X}-\vec{\mu})(\vec{X}-\vec{\mu})^\top).$$
- El vc.a. $\vec{X}=(X_1,\dots,X_n)$ distribuye según una **Normal Multivariada** de media $\vec{\mu}$ y matriz de varianza-covarianza Σ, denotado $\vec{X}\sim\mathcal{N}(\vec{\mu},\Sigma)$, si es a.c. y su densidad está dada por
$$f_{\vec{X}}(\vec{x})=(2\pi)^{-n/2}|\det\Sigma|^{-1/2}e^{-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{\mu})^\top\Sigma^{-1}(\vec{x}-\vec{\mu})}.$$
- Para $\vec{X}\sim\mathcal{N}(\vec{\mu},\Sigma)$ se tiene $X_i\sim\mathcal{N}(\mu_i,\Sigma_{i,i})$.

Problemas

P1. Sea $L>0$. Sean X,Y v.a. con función de densidad conjunta
$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{1}{Lx}\mathbb{1}_{\{0<x<L,\ 0<y<x\}}$$

a) Sea $x\in(0,L)$ e $y\in(0,x)$. Calcule $f_{Y|X}(y|x)$ la función de densidad condicional de Y en y dado $X=x$.
b) Sea $x\in(0,L)$. Calcule la esperanza condicional $\mathbb{E}(Y|X=x)$.
c) Calcule $\mathbb{E}(X)$ y $\mathbb{E}(Y)$.

P2. Sean U_1 y U_2 v.a.'s i.i.d. uniformes en $[0,1]$. Se define el vector aleatorio
$$\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{-2\ln(U_1)}\cos(2\pi U_2)\\\sqrt{-2\ln(U_1)}\sin(2\pi U_2)\end{pmatrix}$$
Calcule las densidades marginales de X_1 y X_2. ¿Son X_1 y X_2 independientes?.

P3. Sean $X\sim$ Uniforme(0,1) e $Y\sim$ Uniforme(-1,1) v.a.'s. independientes. Considere $Z=XY$.

a) Calcule la densidad conjunta de X y Z.
b) Encuentre la densidad marginal f_Z de Z.
c) Determine la densidad condicional $f_{X|Z}$ de X dado Z.
d) Calcule $\mathbb{E}(Z|X)$.
e) Calcule $\mathrm{Cov}(Z,X)$.¿Son X y Z independientes?