Ejercicios de balance Radiativo

CI5101: Hidrología, Primavera 2021

Preparado por el Profesor Miguel Lagos Zúñiga

Problema 1:

Calcule la temperatura que tendría la superficie terrestre suponiendo que no hay atmósfera y que el albedo medio de la Tierra es $\alpha = 0{,}3$.

Solución:

La Figura 1 permite visualizar este problema, ilustrando cómo el Sol emite radiación predominantemente de onda corta, la cual no incide en la superficie terrestre de la misma forma. Por lo tanto, la radiación es máxima en torno al ecuador, puesto que cae de forma perpendicular a la superficie. En la medida que nos acercamos a los polos, el ángulo entre estas ondas electromagnéticas (θ) y las perpendicular a la superficies será más cercano a $\pi/2$ y, por lo tanto, su proyección sobre la superficie será $cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Por otro lado la superficie terrestre sólo es calentada en un lado del globo que está experimentando la luz del día y esta superficie A_{proy}, a su vez devuelve radiación de onda corta según $\alpha = 0{,}3$.

De este modo, el flujo de energía que llega a la Tierra está dado por la constante solar $S_0 = 1368\ Wm^{-2}$, multiplicado por la superficie del círculo que proyecta la Tierra sobre un plano perpendicular a la radiación, $A_{proy} = \pi R^2$, donde R es el radio terrestre.

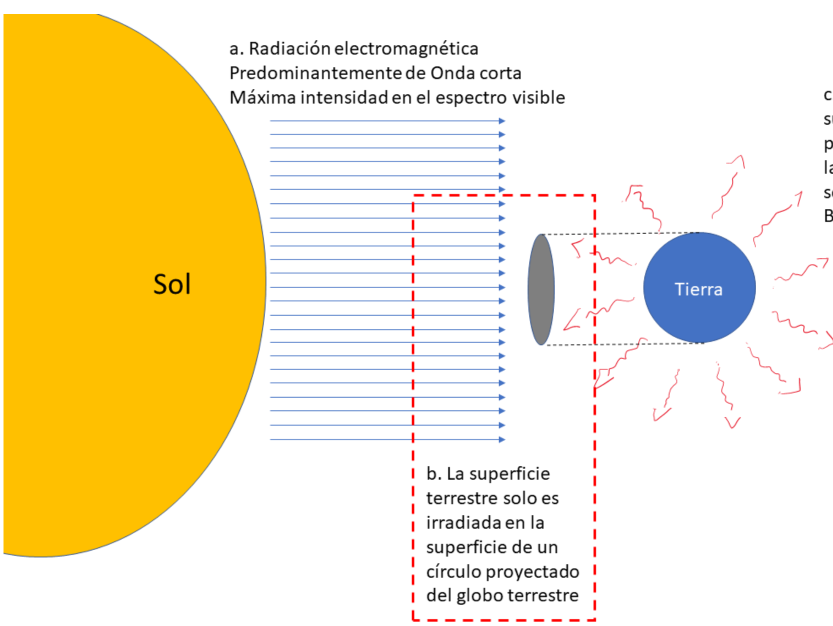

Figura 1: Esquema de balance radiativo terrestre para una condición sin atmósfera.

La Tierra, en toda su superficie $A_{sup} = 4\pi R^2$, emite energía a una tasa de σT_s^4 (ley de Stephan-Boltzmann), bajo el supuesto de que se comporta como un cuerpo negro. Suponiendo que la Tierra, está en equilibrio térmico, se tendrá que las variaciones de flujos de energía son nulos:

$$Energía_{in} = Energía_{out}$$

$$S_0 A_{proy} = S_0(\alpha) A_{proy} + \sigma T_s^4 A_{sup}$$

Reemplazando y reagrupando se tendrá:

$$S_0(1-\alpha)\pi R^2 = \sigma T_s^4 4\pi R^2$$

$$T_s = \left(\frac{S_0(1-\alpha)}{4\sigma}\right)^{1/4}$$

$$T_s = 255K = -18°C.$$

Problema 2:

Supongamos ahora una condición con atmósfera, la que es especialmente absorbente a radiaciones electromagnéticas de onda larga por la presencia de gases de efecto invernadero. Por otro lado, la atmósfera permite pasar la mayor cantidad de radiación de onda corta, por lo que se puede suponer que es relativamente transparente a ella. Con estos antecedentes, calcule la temperatura que tendría la superficie terrestre ante la presencia de la atmósfera.

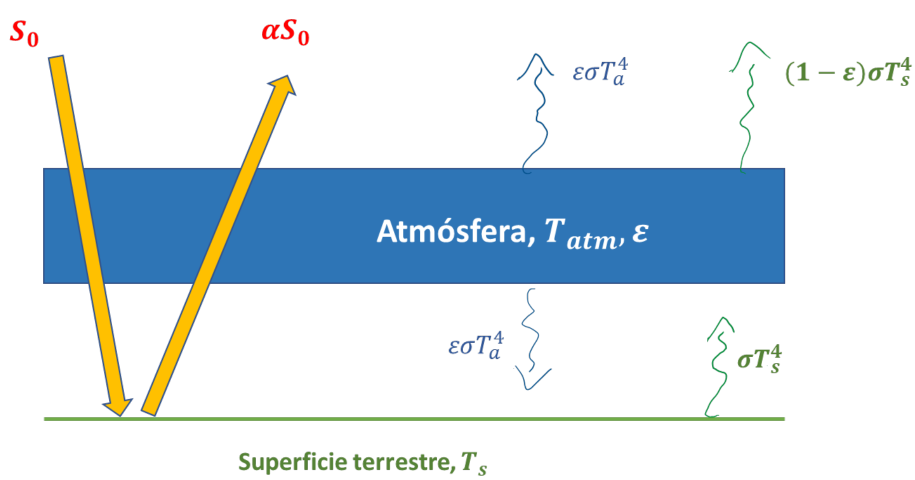

Figura 2: Esquema de balance radiativo terrestre para una condición con atmósfera homogénea, permeable a la radiación solar pero opaca para la radiación termal.

Solución:

En el esquema de la Figura 2, se muestran los flujos radiativos de onda corta (rojo), los de onda larga provenientes de la atmósfera (azul), que emite como cuerpo gris, y por último, cerca de la superficie, se tiene que la radiación terrestre es de cuerpo negro (verde). Como la atmósfera a su vez es opaca, usaremos la ley de Kirchhoff, que establece que la emisividad de un medio es igual a su absortividad. Luego, la atmósfera dejará pasar hacia el espacio exterior solamente $(1-\varepsilon)\sigma T_s^4$.

Al suponer que estamos en condiciones de equilibrio radiativo, tendremos que plantear dos ecuaciones: una para la atmósfera y otra para la superficie terrestre. Para efectos prácticos, supondremos también que la atmósfera tiene una altura despreciable respecto al radio terrestre, de modo que $R + H_{atm} \cong R$.

<u>Balance radiativo en el tope de la atmósfera:</u>

Como estamos en el tope de la atmósfera, no estamos considerando el flujo hacia la superficie pues éste, al estar la atmósfera bien mezclada, va fluyendo gradualmente a través de la misma. Por lo tanto, la ecuación de balance radiativo queda de la forma:

$$S_0\pi R^2 = \alpha S_0 \pi R^2 + \varepsilon\sigma T_a^4 4\pi R^2 + (1-\varepsilon)\sigma T_s^4 4\pi R^2$$

Con un poco de álgebra, se obtiene:

$$T_a^4 = \frac{S_0(1-\alpha)}{4\varepsilon\sigma} - \frac{(1-\varepsilon)T_s^4}{\varepsilon} \qquad (1)$$

<u>Balance radiativo en la superficie terrestre:</u>

$$S_0\pi R^2 + \varepsilon\sigma T_a^4 4\pi R^2 = \alpha S_0\pi R^2 + \sigma T_s^4 4\pi R^2$$

Al realizar un poco de álgebra, se obtienen las siguientes expresiones:

$$T_a^4 = \frac{T_s^4}{\varepsilon} - \frac{S_0(1-\alpha)}{4\varepsilon\sigma} \qquad (2)$$

$$T_s^4 = \frac{S_0(1-\alpha)}{4\sigma} - \varepsilon T_a^4 \qquad (3)$$

Igualando (1) y (2), se obtiene:

$$T_s^4 = \frac{S_0(1-\alpha)}{2\sigma(2-\varepsilon)}$$

Reemplazando esto en la ecuación (3):

$$T_a^4 = \frac{S_0(1-\alpha)}{4\sigma(2-\varepsilon)}$$

Estas dos expresiones indican que $T_s = (2)^{1/4} T_a = 1{,}19 T_a$

Gráficamente se tendrá que, para distintas emisividades, la temperatura superficial varía como se ilustra en la Figura 3:

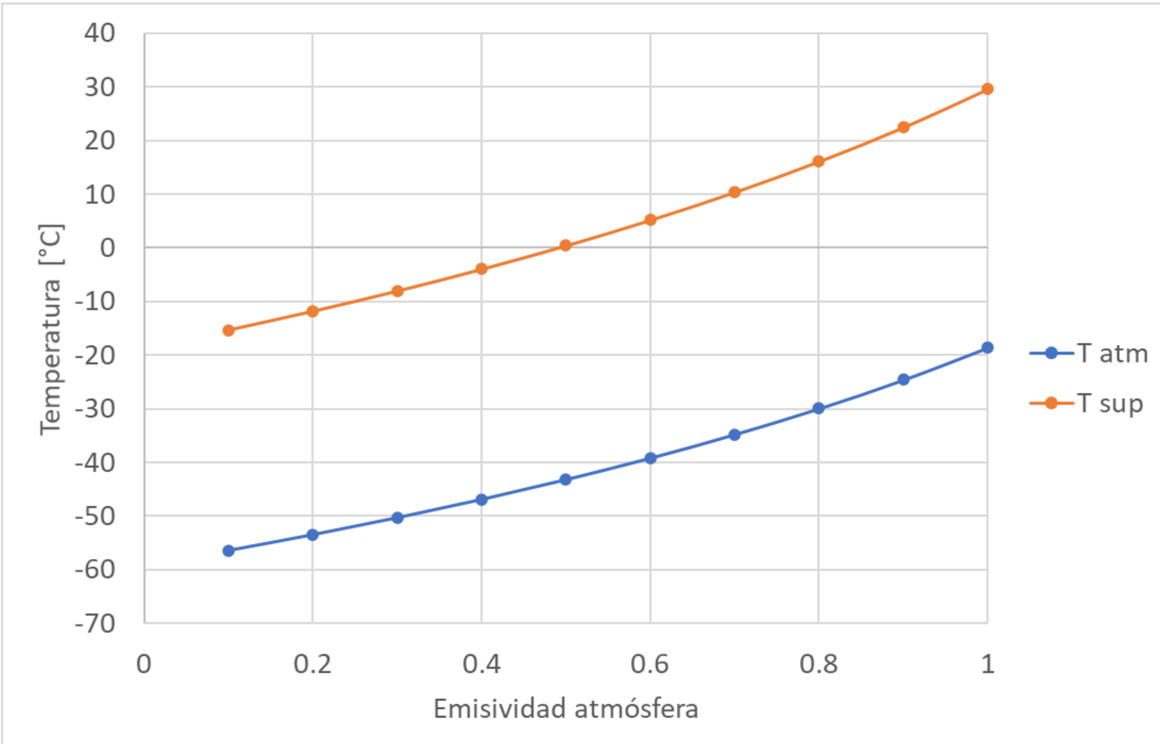

Figura 3: Temperaturas que se obtendrían al tope de la atmósfera y en superficie para el problema desarrollado.

La atmósfera, al ser un cuerpo gris, permite que la temperatura en la superficie terrestre sea más cálida.

Problema 3:

Un satélite se encuentra orbitando relativamente cerca de la Tierra, de forma tal que puede suponer que la radiación que rebota desde el planeta es despreciable en comparación a la radiación recibida directamente desde el Sol. Si el satélite repentinamente pasa a la sombra de la Tierra, dejando de recibir radiación solar, ¿a qué tasa se enfriaría? Considere que el satélite tiene una masa de 10^3 Kg, un calor específico de 10^3 J (Kg K)$^{-1}$ y que puede ser representado por una esfera de radio 1,5 m.

Solución:

El balance energético del satélite antes de pasar a la zona de sombra sería idéntico que para el Problema 1 (suponiendo que se comporta como un cuerpo negro), pero considerando un albedo igual a cero (dado que la radiación terrestre es despreciable). Por lo tanto, la temperatura de equilibrio del satélite sería:

$$T_s = \left(\frac{S_0(1-0)}{4\sigma}\right)^{1/4} = 279\ K$$

Cuando el satélite pasa por detrás de la Tierra, el balance radiativo deja de estar en equilibrio pues existe una variación en la energía interna, expresada como cambio en la temperatura. Por lo tanto, el balance de energía queda de la siguiente forma:

$$mc\frac{dT}{dt} = -4\pi r^2 \sigma T_E^4$$

Reemplazando en la ecuación anterior:

$$10^3 Kg 10^3 WsKg^{-1}K^{-1}\frac{dT}{dt} = -4\pi 1{,}5^2 m^2 5{,}67\cdot 10^{-8} Wm^{-2}K^{-4} 279^4 K^4$$

Simplificando unidades, se tendrá:

$$10^6 K^{-1}s\frac{dT}{dt} = -9713$$

Lo que equivale a:

$$\frac{dT}{dt} = -0{,}0097\frac{K}{s} \approx -35\frac{K}{hr}$$

Note el impacto que tiene el radio del objeto, y su masa en el rol del enfriamiento de estos equipos.