

Resumen / Repaso:

Fuerza: Aquello que causa un cambio en el movimiento de un objeto.

Marco de ref. inercial: Marco de ref. en el que un cuerpo que **NO** interactúa con otros objetos experimenta aceleración nula.

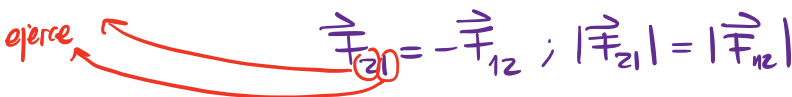
→ Un marco de ref. que se mueve con $\vec{v}$ constante c/r a un marco inercial, es también un marco inercial.

Leyes de Newton:

1^{ra} ley: En ausencia de una Fuerza externa, al observar desde un M.R.I., un objeto en reposo permanece en reposo y uno con mov. uniforme en línea recta mantiene dicho mov.

2^{da} ley: $\vec{F}_{\text{neto}} = m\vec{a}$

3^{ra} ley: Si dos objetos interactúan, la fuerza que ejerce 1 sobre 2 es igual en magnitud y opuesta en dirección a la fuerza que ejerce 2 sobre 1:



$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} ; |\vec{F}_{21}| = |\vec{F}_{12}|$$

Fuerza gravitacional: $\vec{F}_g = m\vec{g}$

Peso: $|\vec{F}_g|$, es la magnitud de la Fuerza gravitacional

¿Cómo abordar problemas?

1.- DCL de los objetos en estudio:

- Tratar objetos como masas puntuales (a no ser que se indique lo contrario) **y restricciones.**
- Definir fuerzas que actúan DIRECTAMENTE sobre el objeto:
 - gravitatoria si hay $\vec{g}$.
 - Tensión si hay cuerdas.
 - Normal si hay alguna superficie.

2.- Definir eje de coordenadas.

3.- Descomponer Fuerzas en ejes.

4.- Escribir 2da ley: $\sum \vec{F} = m\vec{a}$; para cada objeto en estudio.

La suma de Fuerzas son las presentes en el DCL, y las escribimos en forma vectorial.

Escribir 2da ley por eje: $\sum F_x = m a_x$
 $\sum F_y = m a_y$ } ecuaciones de mov.

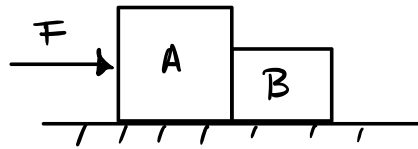
5.- Imponer condiciones sobre ecuaciones de mov.

- Si hay poleas, det. relación entre aceleracs.
- Si hay sistema de masas de un cuerpo en contacto, ocupar 3ra ley
- etc.

6.- Despejar incógnitas, considerando que

ecuaciones $\geq$ # incógnitas.

P1



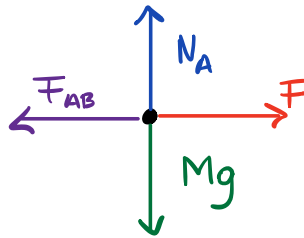
(a) Aceleración del sistema.

(b) Fuerza de B sobre A.

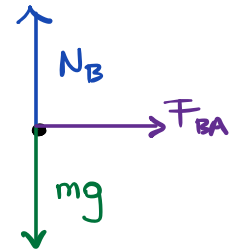
Tenemos que sobre A se ejerce una fuerza F , moviéndose y arrastrando a B.

(a) Primero, comenzamos con los DCL de cada cuerpo:

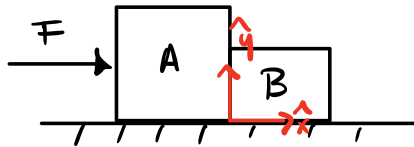
A:



B:



Definimos el eje de ref:



De acuerdo al eje que escogimos, las fuerzas ya están descompuestas por eje.

Escribimos 2da ley para ambos cuerpos:

A: $\sum \vec{F} = m\vec{a}_A$. Del DCL:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}_A \Leftrightarrow -F_{AB}\hat{x} + F\hat{x} + N_A\hat{y} - Mg\hat{y} = M(a_{Ax}\hat{x} + a_{Ay}\hat{y})$$

Por ejes:

$$\begin{aligned} \hat{x} \quad & -F_{AB} + F = Ma_{Ax} & (1) \\ \hat{y} \quad & N_A - Mg = Ma_{Ay} & (2) \end{aligned}$$

$$B: \Sigma \vec{F} = m \vec{a}_B \Leftrightarrow F_{BA} \hat{x} + N_B \hat{y} - mg \hat{y} = m(a_{Bx} \hat{x} + a_{By} \hat{y})$$

Por ejes: $\hat{x}$ | $F_{BA} = m a_{Bx}$ (3)

$\hat{y}$ | $N_B - mg = m a_{By}$ (4)

Imponemos condiciones:

- No hay mov. en $\hat{y} \Rightarrow a_{Ay} = a_{By} = 0$
- El sistema se mueve como un todo, por lo que ambos cuerpos comparten la misma aceleración $\Rightarrow a_{Bx} = a_{Ax} = a$
- Por 3era Ley: $F_{BA} = F_{AB}$.

Nos interesa el mov en $\hat{x}$. Reemplazando:

$$-F_{AB} + F = Ma \quad (i)$$

$$F_{AB} = ma \quad (ii)$$

Sumando (i) + (ii):

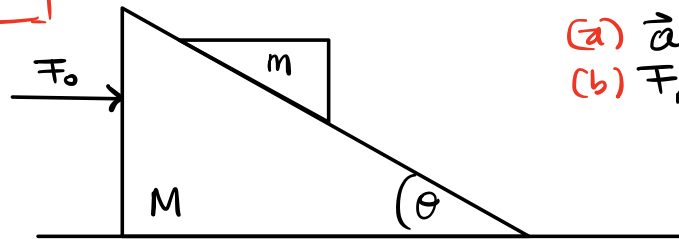
$$F = (m+M)a$$

$$\Rightarrow a = \frac{F}{M+m} \sim \frac{N}{kg} = \frac{kg \cdot \frac{m}{s^2}}{kg} = \frac{m}{s^2} \checkmark$$

(b) Nos piden obtener F_{AB} . Obteniendo el resultado obtenido y reemplazando en (ii):

$$F_{AB} = \frac{m F}{M+m} \quad \frac{kg \cdot N}{kg} = N \checkmark$$

P2

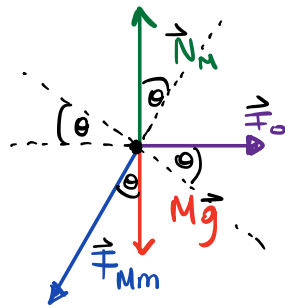


- (a) $\vec{a}$ del sistema.
(b) F_{mM} .

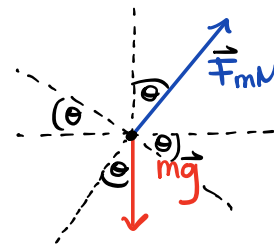
Al igual que en el problema anterior, tenemos un bloque al que le es ejercida una fuerza F_0 , moviéndose en 1D, mientras que el bloque que está encima, m , está en reposo. El ángulo θ a priori lo desconocemos.

Comenzamos con los DCL de cada cuerpo:

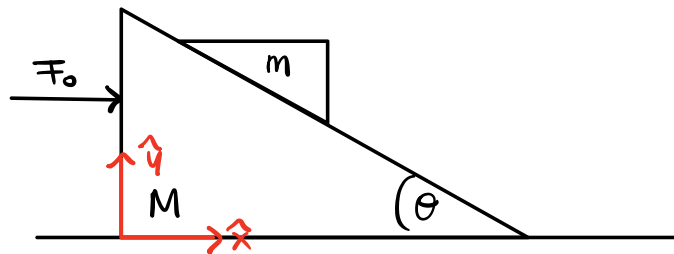
M:



m:

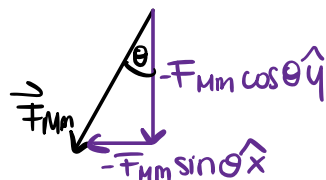


Fijamos el eje de ref.:

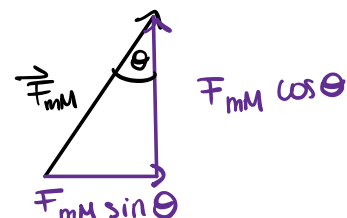


Con este eje coordinado, descomponemos la fuerza de contacto entre bloques:

M:



m:



Escribimos la 2^{da} ley:

$$M: \sum \vec{F} = M \vec{a}_M \Leftrightarrow$$

$$-F_{mm} \sin \theta \hat{x} + F_0 \hat{x} + N_M \hat{y} - Mg \hat{y} - F_{mm} \cos \theta \hat{y} = M(a_{mx} \hat{x} + a_{my} \hat{y})$$

$$\text{Por eje: } \begin{array}{l} \hat{x} \\ \hat{y} \end{array} \begin{array}{l} -F_{mm} \sin \theta + F_0 = M a_{mx} \\ N_M - Mg - F_{mm} \cos \theta = M a_{my} \end{array} \quad \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array}$$

$$m: \sum \vec{F} = m \vec{a}_m \Leftrightarrow$$

$$F_{mm} \sin \theta \hat{x} + F_{mm} \cos \theta \hat{y} - mg \hat{y} = m(a_{mx} \hat{x} + a_{my} \hat{y})$$

$$\text{Por eje: } \begin{array}{l} \hat{x} \\ \hat{y} \end{array} \begin{array}{l} F_{mm} \sin \theta = m a_{mx} \\ F_{mm} \cos \theta - mg = m a_{my} \end{array} \quad \begin{array}{l} (3) \\ (4) \end{array}$$

Ahora imponemos:

→ No hay mov. en $\hat{y} \Rightarrow a_{my} = a_{my} = 0$

→ El sistema se mueve como un todo:

$$a_{mx} = a_{mx} = a.$$

→ 3^{ra} ley: $F_{mM} = F_{Mm}$

Reemplazando; y nuevamente concentrados en $\hat{x}$:

$$\begin{array}{l} -F_{mm} \sin \theta + F_0 = M a \\ F_{mm} \sin \theta = m a \end{array} \quad \begin{array}{l} (i) \\ (ii) \end{array}$$

Sumando (i) y (ii)

$$F_0 = (M+m)a \Rightarrow a = \frac{F_0}{M+m}$$

(b) Necesitamos obtener F_{mm} . De (ii) y usando el resultado obtenido:

$$F_{mM} \sin \theta = \frac{m F_0}{M+m} \quad (iii)$$

Ahora, de (4) y como $a_{my} = 0$:

$$F_{mM} \cos \theta = mg \quad (iv)$$

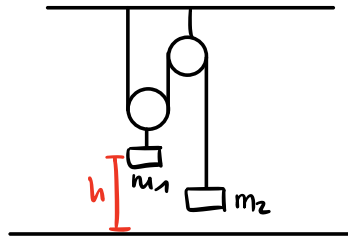
Elevarlo al cuadrado (iii) y (iv) y sumarlos:

$$F_{mM}^2 \sin^2 \theta + F_{mM}^2 \cos^2 \theta = \frac{m^2 F_0^2}{(M+m)^2} + m^2 g^2$$

$$\Rightarrow F_{mM}^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = m^2 \left(\frac{F_0^2}{(M+m)^2} + g^2 \right)$$

$$\Rightarrow F_{mM} = m \sqrt{\frac{F_0^2}{(M+m)^2} + g^2}$$

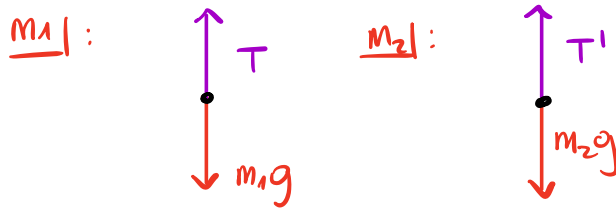
P3



- (a) aceleración de la masa m_2 .
cuando m_2 sube y m_1 baja.
(b) $h_{\max}$ de m_2 .

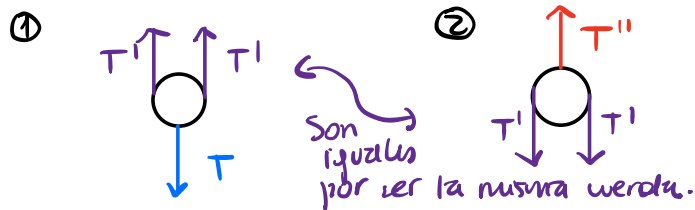
Tenemos un sistema de masas y poleas. mientras m_1 baja, m_2 sube, mediador por la cuerda que pasa por las poleas.

Comenzamos con los DCL de cada cuerpo:



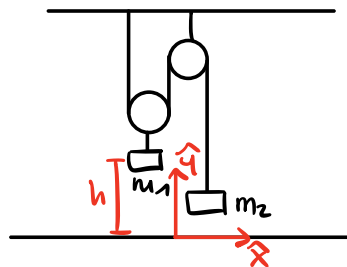
Notar que $T \neq T'$ porque son cuerdas distintas.

Para las poleas:



Podemos obtener info. sobre las tensiones!

Fijamos el eje de referencia:



¶ escribimos la 2^{da} ley para cada cuerpo:

m_1 : $\sum \vec{F} = m_1 \vec{a}_1$ Como sólo hay Fuerzas en $\hat{y}$, escribimos de inmediato:

$$\hat{y} \downarrow \quad T - m_1 g = (-) m_1 a_1 \quad \text{masa 1 va bajando}$$

$$m_2: \sum \vec{F} = m_2 \vec{a}_2$$

$$\hat{y} \downarrow \quad T' - m_2 g = m_2 a_2 \quad (\text{va subiendo}).$$

Imponemos condiciones:

→ la masa 1 es N veces más grande que la de 2:

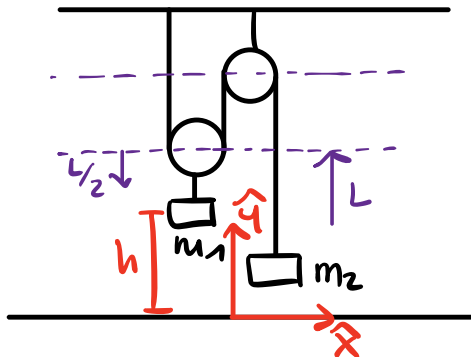
$$\Rightarrow m_1 = N m_2.$$

→ Del DCL de la polea 1:

$$\Rightarrow 2T' - T = 0 \Rightarrow T = 2T'$$

↑
en reposo
y sin masa

→ Notemos además que m_1 y m_2 comparten la cuerda, que se divide de igual forma en la polea de la masa 1. es decir:



Si m_2 se mueve L , m_1 se moverá $L/2$ (ya que la cuerda está repartida en ambos lados de la polea). Como se mueven con $\vec{a}$ cte, tendríamos:

$$m_1: \frac{L}{2} = \frac{1}{2} a_1 t^2$$

$$m_2: L = \frac{1}{2} a_2 t^2$$

Podemos encontrar una relación entre las aceleraciones; dividiendo ambas ecuaciones:

$$\frac{1}{2} = \frac{a_1}{a_2} \Rightarrow 2a_1 = a_2$$

Reemplazando en las de movimiento:

$$(i) \quad 2T' - Nm_2g = -Nm_2 \frac{a_2}{2}$$

dejamos a_2 porque esa nos piden.

$$(ii) \quad T' - m_2g = m_2a_2$$

Si hacemos $(i) - 2(ii)$:

$$-Nm_2g + 2m_2g = -Nm_2 \frac{a_2}{2} - 2m_2a_2$$

Despejamos a_2 :

$$\cancel{m_2}g(2-N) = -\cancel{m_2}a_2\left(\frac{N+2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow g(N-2) = a_2\left(\frac{N+4}{2}\right) \Rightarrow a_2 = 2g \frac{(N-2)}{(N+4)}$$

tiene dims de g ✓

(b) ¿Cómo conocer la altura máxima a la que llega m_2 ?
Notemos primero que:

m_1 llega hasta el suelo: ¿Significa que aquí m_2 llega a forma instantánea a su altura máx?

NO! , cuando m_1 llega al suelo, no hay tensión T' , pero m_2 se sigue moviendo por un intervalo de tiempo Δt hasta que se detiene (por 1era ley?)

De esta manera, durante el intervalo Δt m_2 se mueve sólo con aceleración igual a $\vec{g}$. La ecuación de itinerario que describe el mov. de m_2 ;

$$y = y_0 + v_0 \Delta t - \frac{1}{2} g \Delta t^2$$

$$v = v_0 - g \Delta t$$

En Δt :

$$(1) h_{\max} = 2h + v_0 \Delta t - \frac{1}{2} g \Delta t^2$$

esto es porque inicialmente m_2 estaba en h , por tanto m_2 recorrió $2h$ antes de considerar este intervalo de tiempo.

$$(2) 0 = v_0 - g \Delta t$$

De (2) $\Rightarrow \Delta t = \frac{v_0}{g}$, reemplazando en (1):

$$h_{\max} = 2h + \frac{v_0^2}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0^2}{g^2} \right)$$

$$h_{\max} = 2h + \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g} \quad (**)$$

¿De dónde conocemos v_0 ? Antes del intervalo de tiempo Δt , la tensión T está presente y la aceleración de m_2 es a_2 . la velocidad inicial del intervalo Δt será la velocidad con que llega m_2 a $y = 2h$ (cuando m_1 llega al suelo). En este caso:

$$y = y_0 + v_0 \Delta t + \frac{1}{2} a_2 \Delta t^2$$

$$v = v_0 + a_2 \Delta t$$

Si parte del reposo: $\Rightarrow v_0 = y_0 = 0$. Imponemos que

recorre $2h$ en Δt^* :

$$(3) \quad 2h = \frac{1}{2} a_2 \Delta t^{*2}$$

$$(4) \quad V_0 = a_2 \Delta t^*$$

→ obtenemos $\Delta t^* \rightarrow \Delta t^{*2} = \frac{4h}{a_2} \Rightarrow \Delta t^* = 2\sqrt{\frac{h}{a_2}}$

Reemplazando en (4) $V_0 = 2a_2 \sqrt{\frac{h}{a_2}} = \boxed{2\sqrt{ha_2}} = V_0$

Reemplazando en (*):

$$\begin{aligned} h_{\max} &= 2h + \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{g} \\ &= 2h + \frac{2}{g} ha_2 \end{aligned}$$

Pero $a_2 = 2g \frac{(N-2)}{(N+4)} \Rightarrow h_{\max} = 2h + \frac{2h}{g} \cdot 2g \left(\frac{N-2}{N+4} \right)$

$$= \frac{2hN + 8h}{N+4} + \frac{4Nh - 8h}{N+4}$$

$$\Rightarrow \boxed{h_{\max} = \frac{6hN}{N+4}}$$