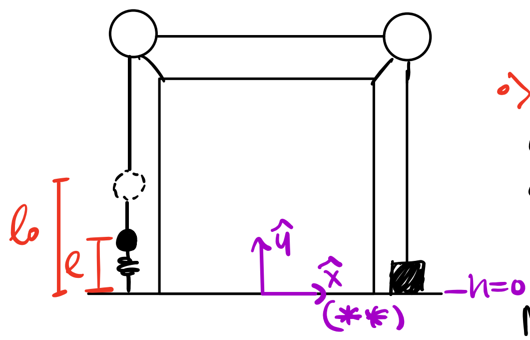
P1

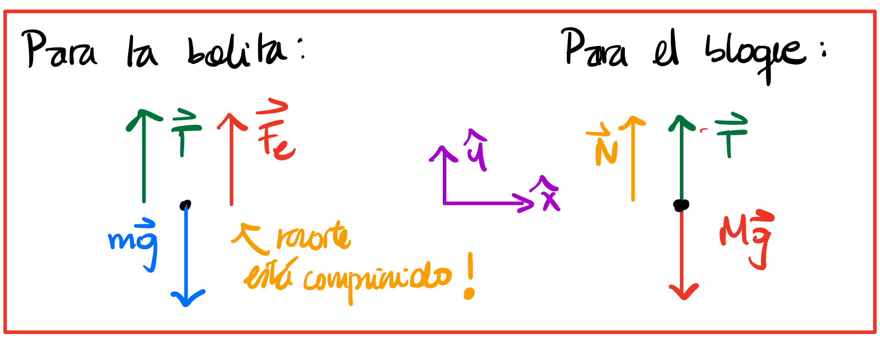
Consideremos el sistema como el de la figura:



∘> De forma intuitiva, tenemos que en el momento en que es dejada caer la bolita, llegará un punto en que el bloque del otro lado se levanta y comienza a subir. Nos interesa conocer la altura mín. a la que se encuentra la masita justo antes de que el bloque se levante, esto es, la altura mínima.

Obs: Es una altura mínima pues cuando es soltada desde $l_0 > l$, el bloque NO se levanta, se mueve en un rango de alturas mayores a l hasta que llega al caso crítico en l.

(a) DCL y ec. de movimiento:



Obs: recordar que como es la misma cuerda, las tensiones son iguales.

Con el sistema de ref escogido, tendremos que:

Para m: $\quad T - mg + F_e = m a_m \quad (1)$

Para M: $\quad N + T - Mg = M a_M \quad (2)$

(b) ℓ máx tq. M no se levanta.

→ Podemos imponer condiciones:

- Si M está en el caso crítico en que no se levanta:

$$N = 0 \; ; \; a_M = 0$$

- Si M está en el caso crítico, también lo estará el largo actual del resorte, que en este caso es ℓ:

$$F_e = k(\ell - \ell_0)$$

- Ojo, no se puede asumir que m esté en reposo también ($a_m \neq 0$, no tenemos cómo asegurar que es justo el ℓ asociado al equilibrio estático el máximo tq el bloque no se levanta).

Reemplazando en (1) y (2):

$$T - mg + k(\ell - \ell_0) = m a_m \quad (3)$$
$$T - Mg = 0 \quad (4)$$

→ (4) en (3):

$$\boxed{(M-m)g + k(\ell - \ell_0) = m a_m \quad (5)}$$

→ Tenemos 2 incógnitas (ℓ, a_m) y una ecuación. ¿Cómo seguir?

→ Podemos ocupar cons. de la energía en dos puntos:

A: Cuando es soltado del reposo en ℓ_0
B: Cuando llega a ℓ

$\Big\}$ fijamos $U=0$ en el suelo. ver (**)

$\Rightarrow E_A = mg\ell_o$ ← Está en reposo → $v_A = 0$
Está en su largo natural → $\frac{1}{2}k(\ell_o - \ell_o)^2 = 0$

$\Rightarrow E_B = mg\ell + \frac{1}{2}k(\ell - \ell_o)^2 + \frac{1}{2}mV_B^2$ rapidez cuando está a una altura ℓ.

Aplicando cons. de la energía: $\Delta E = E_B - E_A = 0$

$$\Rightarrow \boxed{mg\ell + \frac{1}{2}k(\ell-\ell_o)^2 + \frac{1}{2}mV_B^2 = mg\ell_o} \quad (6)$$

→ Ahora tenemos 3 incógnitas y 2 ecuaciones ! ¿De dónde sacar otra ecuación?

→ Recordando cinemática:

$$V_f^2 - V_i^2 = 2a(y_f - y_i)$$

$$\rightarrow \quad V_B^2 - \cancel{V_A^2}^{\,0} = 2a_m(\ell - \ell_o)$$ parte en reposo!

$$\Rightarrow \boxed{V_B^2 = 2a_m(\ell - \ell_o)} \quad (7)$$

→ Ahora sí podemos resolver ! tenemos 3 ecuaciones y 3 incógnitas .

→ De (6) Obtenemos V_B^2 :

$$mg(\ell-\ell_o) + \frac{1}{2}k(\ell-\ell_o)^2 + \frac{1}{2}mV_B^2 = 0$$

$$\Rightarrow (\ell-\ell_o)\left\{\frac{1}{2}k(\ell-\ell_o) + mg\right\} + \frac{1}{2}mV_B^2 = 0$$

$$\Rightarrow V_B^2 = +\frac{2\overbrace{(\ell-\ell_o)}^{\ell_o-\ell}}{m}\left\{\frac{1}{2}k(\ell-\ell_o) + mg\right\}$$

$$\Rightarrow V_B^2 = \frac{2(l_0-l)}{m}\left\{\frac{1}{2}k(l-l_0)+mg\right\}$$

Reemplazando en (4):

$$\cancel{2}\underbrace{\frac{(l_0-l)}{m}}^{-(l-\cancel{l_0})}\left\{\frac{1}{2}k(l-l_0)+mg\right\} = \cancel{2}a_m(l-\cancel{l_0})$$

$$\Rightarrow \boxed{a_m = -\frac{1}{m}\left\{\frac{1}{2}k(l-l_0)+mg\right\}}$$

Reemplazando en (5):

$$(M-m)g + k(l-l_0) = \cancel{m}\cdot -\frac{1}{\cancel{m}}\left\{\frac{1}{2}k(l-l_0)+mg\right\}$$

Despejamos l:

$$Mg-\cancel{mg} = -k(l-l_0) - \frac{1}{2}k(l-l_0) - \cancel{mg}$$

$$\Rightarrow Mg = -\frac{3}{2}k(l-l_0) \Rightarrow \boxed{l = l_0 - \frac{2}{3k}Mg}$$

→ Notemos que el resultado tiene sentido pues $l < l_0$ (lo que nos dice que el resorte está comprimido!).

→ Otra condición para que el resultado tenga sentido?

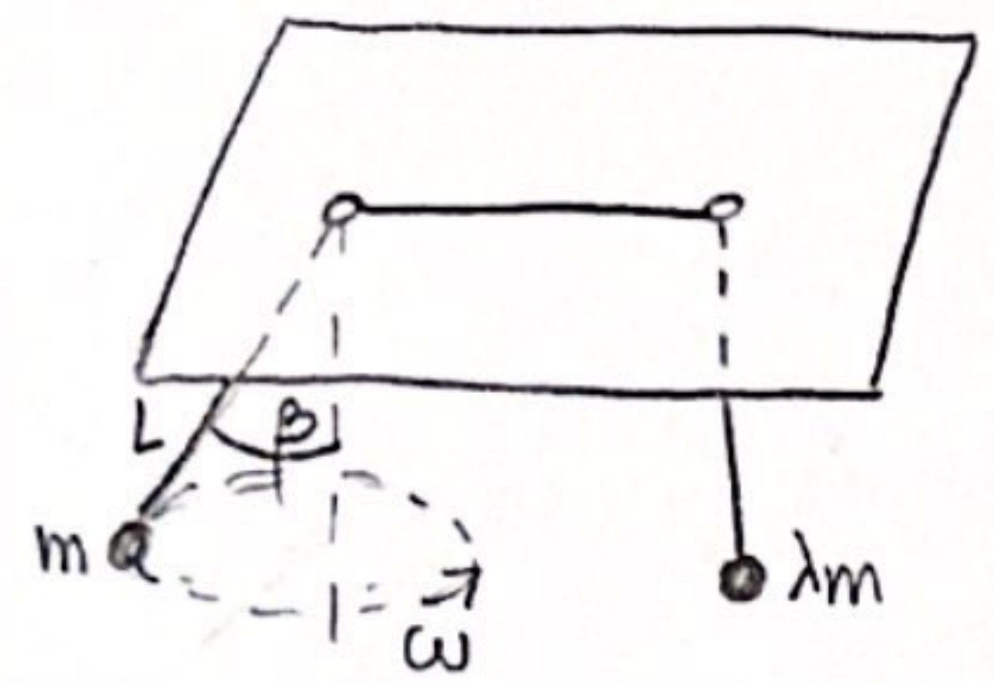
$a_m < 0$ (Para que la bolita baje):

$$a_m = -\frac{1}{m}\left\{\frac{1}{2}k(l-l_0)+mg\right\} \qquad \Big/ \; l = l_0 - \frac{2Mg}{3k}$$

$$\Rightarrow a_m = -\frac{1}{m}\left\{-\frac{Mg}{3}+mg\right\} = \frac{g}{m}\left(\frac{M}{3}-m\right)$$

→ Necesitamos que $\frac{M}{3} - m < 0 \Rightarrow \boxed{m > \frac{M}{3}}$

P3

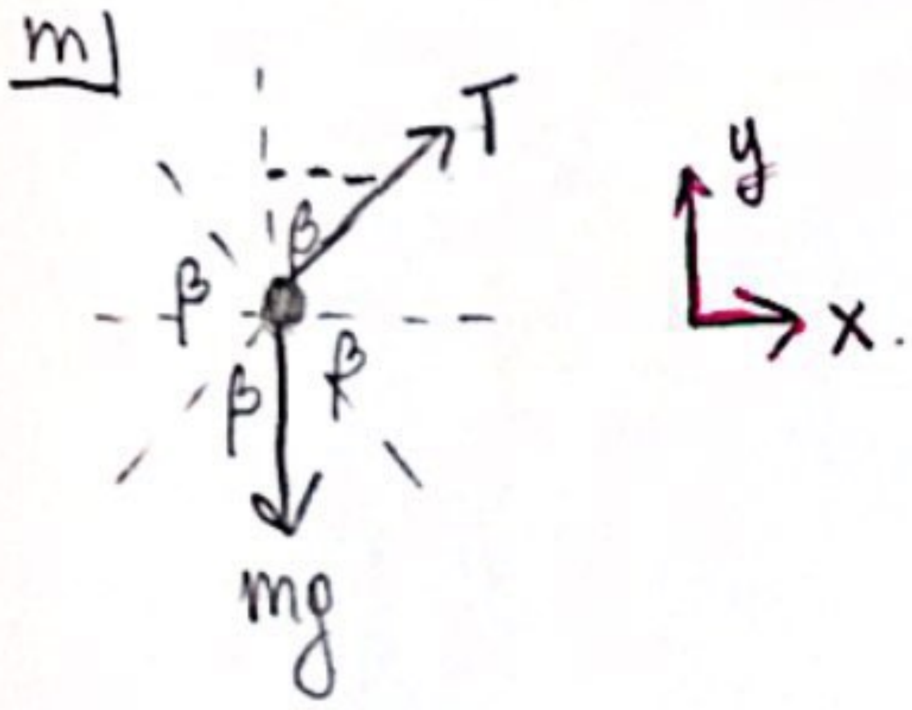


$\downarrow \vec{g}$

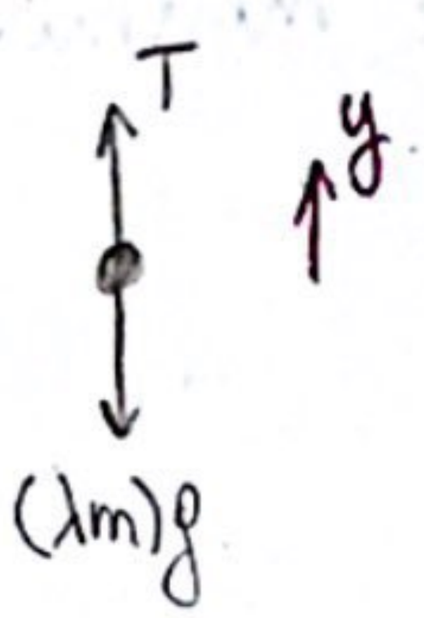
Nos piden encontrar la velocidad angular ω y el ángulo β de la masa m tq. la masa λm $\underbrace{\text{no deslice}}_{\text{equilibrio estático.}}$

DCL

m|



λm|



→ Ecuaciones de movimiento

m| ΣF_x: $\boxed{T\operatorname{sen}\beta = m \cdot a_{x_m}}$ (1)

ΣF_y: $\boxed{T\cos\beta - mg = m \cdot a_{y_m}}$ (2)

λm| ΣF_y: $\boxed{T - (\lambda m)g = m \cdot a_{y_{\lambda m}}}$ (3).

Condiciones

ω y β en condiciones de equilibrio ⇒ bolita (λm) quieta ⇒ bolita m no se mueve verticalmente.

∴ El hecho que la bolita λm no deslice hace que la bolita m se mantenga a la misma altura describiendo un movimiento circunferencial

Con esto, tenemos lo sgte:

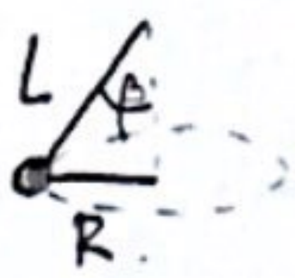
- $a_{y_m} = a_{y_{\lambda m}} = 0$.
- $a_{x_m} \neq 0$ → Describe una circunferencia ⇒ $a_{x_m} = a_c = \frac{v^2}{R} = \omega^2 \cdot R$

Reemplazando en las ecuaciones:

(1): $T\operatorname{sen}\beta = m \cdot \omega^2 \cdot R$ Incógnitas → sabemos que R es el radio de la circunferencia:

(2): $T\cos\beta = mg$

(3): $T = (\lambda m)g$.



por trigonometría:

$\operatorname{sen}\beta = \frac{R}{L}$ ⇒ $R = L\operatorname{sen}\beta$.

⇒ (1): $T\cancel{\operatorname{sen}\beta} = mL\cancel{\operatorname{sen}\beta}\,\omega^2$.

De (3): $T = \lambda mg$ / Reemplazamos en (1) ⇒ $\lambda \cancel{m} g = \cancel{m} L\omega^2$. ⇒ $\omega^2 = \frac{\lambda g}{L}$ ∴ $\omega = \sqrt{\frac{\lambda g}{L}}$

De (2): $\lambda \cancel{m}\cancel{g} \cos\beta = \cancel{m}\cancel{g}$ ⇒ $\cos\beta = \frac{1}{\lambda}$ ∴ $\beta = \arccos(1/\lambda)$

Scanned with CamScanner