Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Física

FI1100-5 Introducción a la Física Moderna, 2022/02
Pauta Auxiliar 4 - Ondas

Profesor: **Sebastián López**
Auxiliares: Rodrigo Cuellar
Camilo Núñez Barra
Ayudante: Clemente Miranda

5 de septiembre de 2022

P1. Ondas propagativas

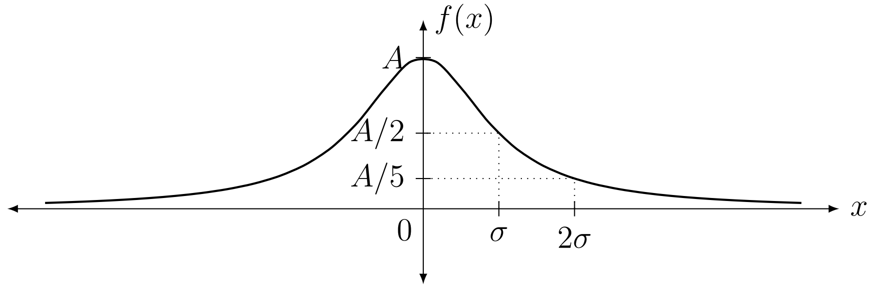
Considere la función $f(x) = A/(1+(x/\sigma)^2)$, donde x, A y σ tienen unidades de longitud. Suponga $A > 0$ y $\sigma > 0$.

a) Bosqueje la función f.

Notamos rápidamente ciertas propiedades de f:

- Función par, $f(x) = f(-x)$
- Siempre positiva, $f(x) > 0$
- No tiene asíntota vertical, porque el denominador nunca se anula
- La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal de f, porque $f(x \to \pm\infty) \to 0$
- $f(0) = A$ (y es el máximo)
- $f(\sigma) = A/2$
- $f(2\sigma) = A/5$, etc. (va decreciendo)

Considerando estas características, podemos realizar el siguiente bosquejo de f:



Identificamos A como un parámetro de altura máxima o amplitud y σ como un parámetro de ancho.

b) **Escriba $f(\bar{x})$ para $\bar{x} = x - ct$, donde c es la velocidad de propagación de la onda y t es el tiempo. Si $A = 1\,\mathrm{cm}$, $\sigma = 1\,\mathrm{cm}$ y $c = 1\,\mathrm{cm/s}$, bosqueje la función $y(x,t) = f(x-ct)$ para $t = 0\,\mathrm{s}, 1\,\mathrm{s}, 2\,\mathrm{s}$, donde $y(x,t)$ representa la amplitud de la onda en la posición x y tiempo t.**

Haciendo el cambio de variable para introducir una onda viajera hacia la derecha,

$$f(\bar{x}) = f(x - ct) = \frac{A}{1 + \left(\dfrac{x - ct}{\sigma}\right)^2}. \tag{1.1}$$

Reemplazando los valores de las constantes,

$$f(x - 1\,\mathrm{cm\,s^{-1}} \times t) = \frac{1\,\mathrm{cm}}{1 + \left(\dfrac{x - 1\,\mathrm{cm\,s^{-1}} \times t}{1\,\mathrm{cm}}\right)^2} \tag{1.2}$$

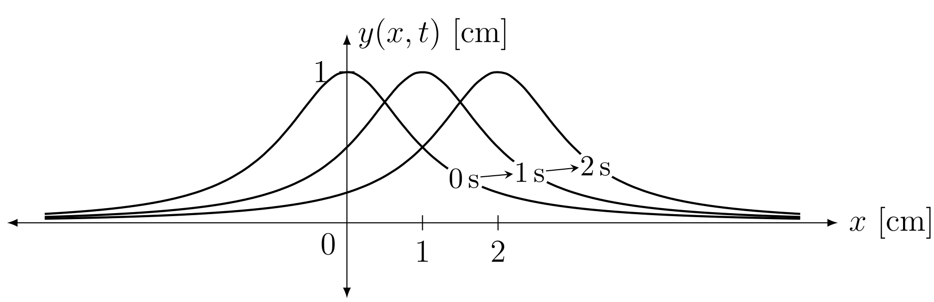
y evaluando en los tiempos deseados,

$$y(x, 0\,\mathrm{s}) = f(x) = \frac{1\,\mathrm{cm}}{1 + \left(\dfrac{x}{1\,\mathrm{cm}}\right)^2}, \tag{1.3}$$

$$y(x, 1\,\mathrm{s}) = f(x - 1\,\mathrm{cm}) = \frac{1\,\mathrm{cm}}{1 + \left(\dfrac{x - 1\,\mathrm{cm}}{1\,\mathrm{cm}}\right)^2}, \tag{1.4}$$

$$y(x, 2\,\mathrm{s}) = f(x - 2\,\mathrm{cm}) = \frac{1\,\mathrm{cm}}{1 + \left(\dfrac{x - 2\,\mathrm{cm}}{1\,\mathrm{cm}}\right)^2}. \tag{1.5}$$

Notamos que la onda se ha trasladado hacia la derecha en $1\,\mathrm{cm}$ cada segundo, por lo tanto el bosquejo de $y(x,t)$ es:



c) **Calcule la velocidad vertical $v_y(x,t)$ de la cuerda en el instante $t = 0$. Para esto, derive la función $y(x,t)$ con respecto al tiempo considerando x constante.**

La velocidad vertical es

$$v_y(x,t) = \frac{\partial y(x,t)}{\partial t}, \tag{1.6}$$

por lo que para esta onda viajera hacia la derecha,

$$v_y(x,t) = \frac{\partial f(x-ct)}{\partial t}. \tag{1.7}$$

Reemplazando $f(x-ct) = A[1+((x-ct)/\sigma)^2]^{-1}$ y como A es constante,

$$\frac{\partial f(x-ct)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\big(A[1+((x-ct)/\sigma)^2]^{-1}\big) = A\frac{\partial}{\partial t}\big([1+((x-ct)/\sigma)^2]^{-1}\big) \tag{1.8}$$

Aplicando la regla de la cadena junto con la regla de la potencia,

$$\frac{\partial f(x-ct)}{\partial t} = A(-1)[1+((x-ct)/\sigma)^2]^{-2}\frac{\partial}{\partial t}\big(1+((x-ct)/\sigma)^2\big) \tag{1.9}$$

El término 1 es constante, por lo que su derivada es cero, y $1/\sigma^2$ también es una constante,

$$\frac{\partial f(x-ct)}{\partial t} = A(-1)[1+((x-ct)/\sigma)^2]^{-2}\frac{1}{\sigma^2}\frac{\partial}{\partial t}\big((x-ct)^2\big) \tag{1.10}$$

Aplicando nuevamente la regla de la cadena junto con la regla de la potencia,

$$\frac{\partial f(x-ct)}{\partial t} = A(-1)[1+((x-ct)/\sigma)^2]^{-2}\frac{1}{\sigma^2}(2)(x-ct)^1\frac{\partial}{\partial t}(x-ct) \tag{1.11}$$

La derivada parcial con respecto a t considera x como constante, luego

$$\frac{\partial f(x-ct)}{\partial t} = A(-1)[1+((x-ct)/\sigma)^2]^{-2}\frac{1}{\sigma^2}(2)(x-ct)^1\frac{\partial}{\partial t}(-ct) \tag{1.12}$$

y entonces

$$\frac{\partial f(x-ct)}{\partial t} = A(-1)[1+((x-ct)/\sigma)^2]^{-2}\frac{1}{\sigma^2}(2)(x-ct)^1(-c) \tag{1.13}$$

Concluimos que la velocidad vertical de la cuerda es

$$v_y(x,t) = \frac{2Ac(x-ct)/\sigma^2}{(1+((x-ct)/\sigma)^2)^2} \tag{1.14}$$

y en el instante $t=0$,

$$v_y(x,0) = \frac{2Acx/\sigma^2}{(1+(x/\sigma)^2)^2}. \tag{1.15}$$

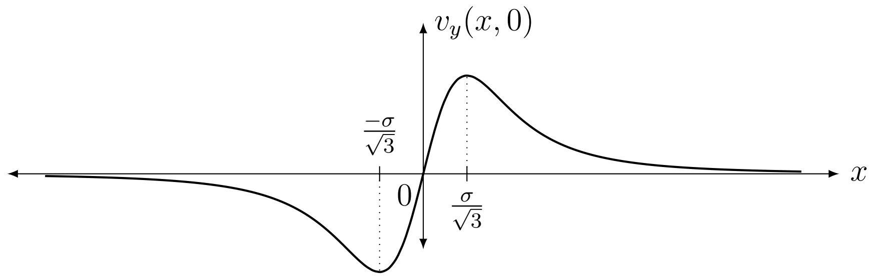
d) Grafique $v_y(x,0)$ en función de x. Note que esta es positiva y negativa en ciertas partes. Interprete el resultado.

Notamos ciertas propiedades de $v_y(x,0)$:

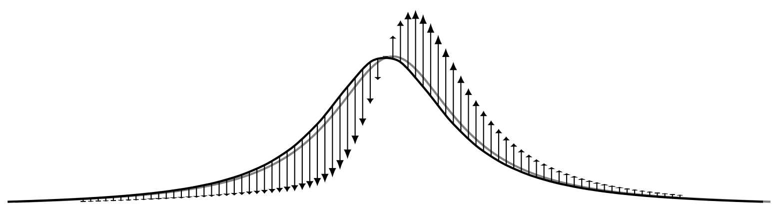
- Pasa por el origen $v_y(0,0)=0$
- Positiva si $x>0$, negativa si $x<0$
- Función impar, $v_y(x,0) = -v_y(-x,0)$
- No tiene asíntota vertical, porque el denominador nunca se anula
- La recta $y=0$ es una asíntota horizontal de $v_y(x,0)$, porque $v_y(x\to\pm\infty,0)\to\pm 0$

- El punto en $x = +\sqrt{\sigma^2/3}$ es un máximo local y en $x = -\sqrt{\sigma^2/3}$ es un mínimo local (se puede verificar derivando, $\partial v_y/\partial x = -2Ac\sigma^2(3x^2 - \sigma^2)/(x^2 + \sigma^2)^3$, e imponiendo que esta derivada es 0 por ser x punto crítico)

Finalmente, el gráfico de la velocidad vertical para el instante inicial es:

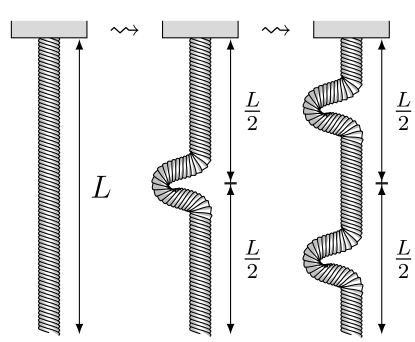


La velocidad vertical es positiva para $x > 0$, por lo que estos puntos de la cuerda se mueven transversalmente hacia arriba, y los puntos $x < 0$ tienen velocidad vertical negativa, por lo que se mueven transversalmente hacia abajo. El punto en $x = 0$ tiene velocidad vertical nula, de modo que está instantáneamente quieto. Todo lo anterior está relacionado con el hecho de que la onda se propaga hacia la derecha, de tal forma que la parte delantera del pulso sube y la parte trasera baja, tal como muestra el siguiente bosquejo:



P2. Cuerda suspendida

Considere una cuerda de densidad lineal de masa ρ y largo L que se cuelga de un techo bajo la acción de la gravedad, sin sostener ninguna masa. Se golpea la cuerda a la mitad, generando la propagación de dos pulsos: uno ascendente y otro descendente.



a) **¿Llegará primero el pulso ascendente al extremo superior de la cuerda o el pulso descendente al extremo inferior de la cuerda?**

Responder a la pregunta "¿Cuál llega primero?" equivale a determinar el pulso que requiere un menor tiempo de viaje.

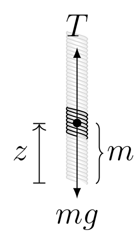
Ambos pulsos deben recorrer la misma distancia ($L/2$) para llegar desde el centro a sus respectivos extremos (pero en sentidos opuestos). Por lo tanto, la velocidad de propagación c nos permite encontrar la respuesta. Si su velocidad es mayor, entonces su intervalo de tiempo es menor.

La velocidad de propagación c de un pulso en una cuerda de densidad lineal de masa ρ y tensión T es

$$c = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \tag{2.1}$$

Si esta velocidad fuese constante, entonces ambos pulsos se demorarían lo mismo. Sin embargo, podemos notar que la tensión T no es uniforme a lo largo de la cuerda (porque la cuerda está colgando bajo la acción de la gravedad), sino que depende de la altura z, i.e. $T = T(z)$. Luego, la velocidad c también depende de la altura z, i.e. $c = c(z)$.

Midamos la altura z con respecto al extremo inferior. Un elemento de cuerda a una altura z debe soportar el peso mg de todo el trozo inferior, con $m = \rho z$ (porque es ρ densidad lineal de masa y el trozo mide z). Considerando que la fuerza peso está en equilibrio con la tensión T, tenemos gracias a la segunda ley de Newton que $T = \rho g z$. Así, la velocidad de propagación es $c = \sqrt{gz}$.



Sea z_a la altura del pulso ascendente y z_d la altura del pulso descendente. Estableciendo que $z_\mathrm{a} > z_\mathrm{d}$, entonces $c(z_\mathrm{a}) > c(z_\mathrm{d})$ en todo momento antes de llegar a los extremos (recordar que la raíz cuadrada es monótona creciente). Es decir, mientras mayor es la altura en la cuerda, mayor es la tensión.

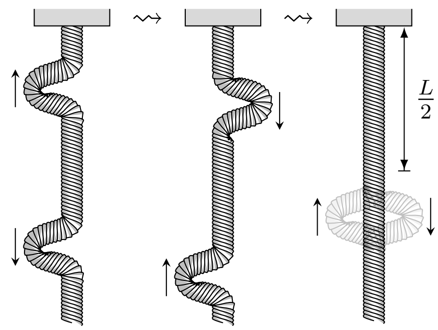
Concluimos que el pulso ascendente llegará al extremo superior primero que el pulso descendente al extremo inferior de la cuerda porque recorre una misma distancia con una velocidad de propagación mayor.

b) Sabemos que cada pulso será reflejado cuando llegue a su respectivo borde. ¿Los pulsos se reencontrarán: sobre el centro de la cuerda, bajo este o en el centro mismo? ¿Cómo será la superposición de estos pulsos en ese instante?

Ahora llamaremos pulso superior al pulso inicialmente ascendente (porque una vez llegue al extremo se va a reflejar y va a descender) y pulso inferior al pulso inicialmente descendente.

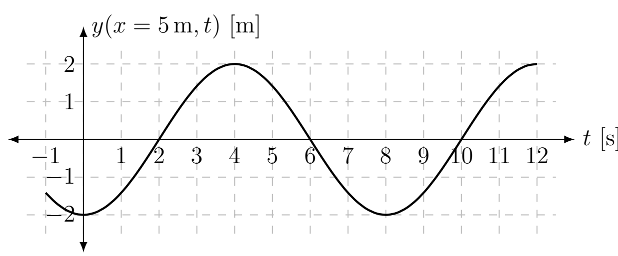
El pulso superior se propaga a una velocidad mayor que el pulso inferior, por lo tanto, recorre una distancia mayor en un menor tiempo y regresa antes al centro de la cuerda. Concluimos entonces que los pulsos se reencontrarán bajo el centro.

El pulso superior se refleja en el techo, que corresponde a un borde fijo, por lo tanto, se refleja invertido. El pulso inferior se refleja en el extremo libre, por lo tanto, se refleja derecho y solamente cambia su dirección de propagación. Al reencontrarse, ambos pulsos se superponen haciendo una interferencia destructiva, es decir, se cancelan mutua y momentáneamente (porque tienen la misma amplitud).



P3. Onda armónica

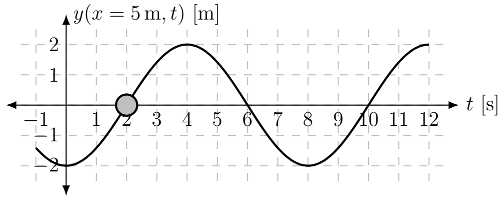
Considere una cuerda ideal, sobre la que pasa una onda armónica transversal (es decir, el desplazamiento de la cuerda es paralelo al eje y y la onda viaja en el eje x). El movimiento de un trozo infinitesimal de la cuerda ubicado en $x = 5\,\text{m}$ se muestra en la siguiente figura:

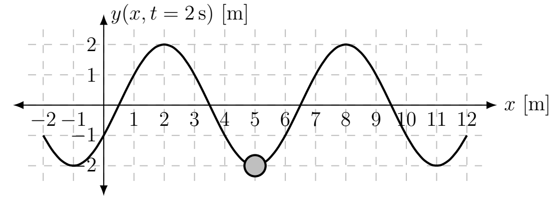


a) **Uno de los siguientes cuatro gráficos representa una foto de la onda en un instante de tiempo determinado. Encuentre cuál gráfico y vs. x corresponde a la onda descrita anteriormente. Justifique su respuesta.**

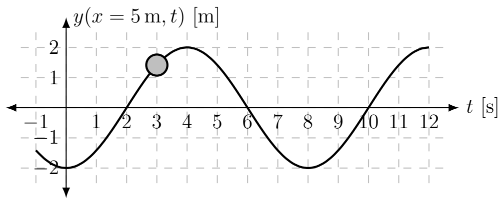
Notemos que el gráfico anterior entrega información de la onda para todo tiempo (entre $-1\,\text{s}$ y $12\,\text{s}$) pero solo para un punto particular del espacio, $x = 5\,\text{m}$. Los cuatro gráficos que vienen a continuación entregan información de la onda para toda posición (entre $-2\,\text{m}$ y $12\,\text{m}$) pero solo para un instante determinado del tiempo. Ambos gráficos corresponderán a la misma onda solamente si entregan información coherente.

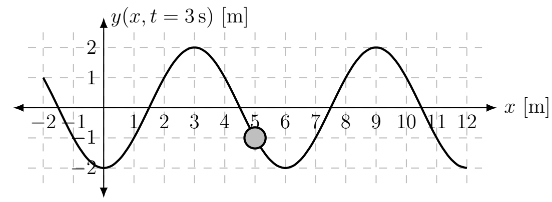
i) Este gráfico y vs. x muestra la forma de la onda para $t = 2\,\text{s}$. Además, tenemos el gráfico anterior para $x = 5\,\text{m}$. Por lo tanto, podemos marcar el punto $(x = 5\,\text{m}, t = 2\,\text{s})$ en ambos gráficos y comparar la información que entregan. Apreciamos que el gráfico y vs. t dice que $y(x = 5\,\text{m}, t = 2\,\text{s}) = 0\,\text{m}$, mientras que este gráfico y vs. x dice que $y(x = 5\,\text{m}, t = 2\,\text{s}) = -2\,\text{m}$, por lo que hay una contradicción y ambos gráficos no pueden corresponder a la misma onda.



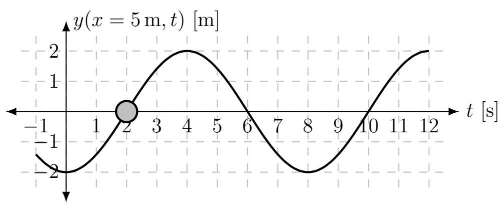
i)


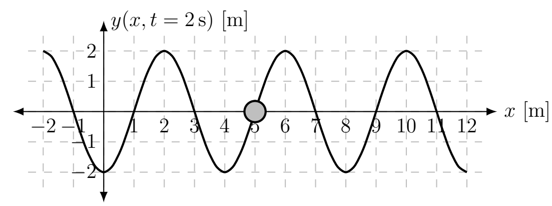
ii) Análogamente al análisis anterior, este gráfico y vs. x muestra la forma de la onda para $t = 3\,\mathrm{s}$, y como el gráfico y vs. t muestra la evolución temporal del punto $x = 5\,\mathrm{m}$, entonces podemos marcar el punto $(x = 5\,\mathrm{m}, t = 3\,\mathrm{s})$ y notar que el gráfico y vs. t dice que $y(x = 5\,\mathrm{m}, t = 3\,\mathrm{s}) \approx 1.5\,\mathrm{m}$, mientras que este gráfico y vs. x dice que $y(x = 5\,\mathrm{m}, t = 3\,\mathrm{s}) = -1\,\mathrm{m}$, por lo que concluimos que no corresponden a la misma onda ya que entregan información contradictoria.



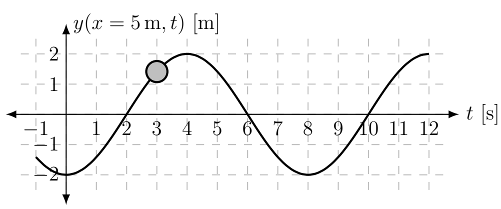
ii)


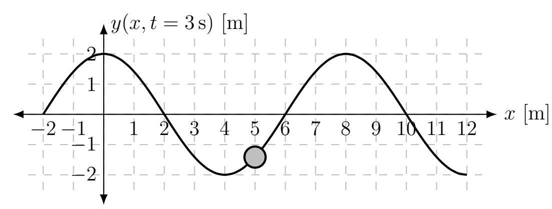
iii) Nuevamente realizando un análisis análogo, notamos que ahora ambos gráficos sí entregan información coherente, porque el gráfico y vs. t dice que $y(x = 5\,\mathrm{m}, t = 2\,\mathrm{s}) = 0\,\mathrm{m}$ y este gráfico y vs. x también dice que $y(x = 5\,\mathrm{m}, t = 2\,\mathrm{s}) = 0\,\mathrm{m}$. Concluimos que este gráfico y vs. x corresponde a la onda descrita en el gráfico y vs. t.



iii)


iv) Este gráfico y vs. x tampoco entrega información coherente porque dice que $y(x = 5\,\mathrm{m}, t = 3\,\mathrm{s}) \approx -1.5\,\mathrm{m}$ pero sabemos por el gráfico y vs. t que debería coincidir con $y(x = 5\,\mathrm{m}, t = 3\,\mathrm{s}) \approx 1.5\,\mathrm{m}$, por lo que también lo descartamos.



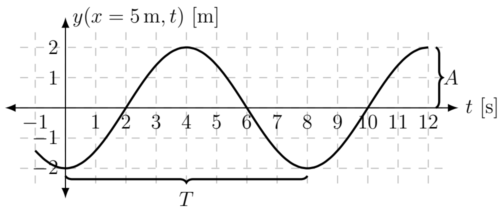
iv)


b) Determine la amplitud, longitud de onda y periodo de la onda. Explique cómo deduce estos valores.

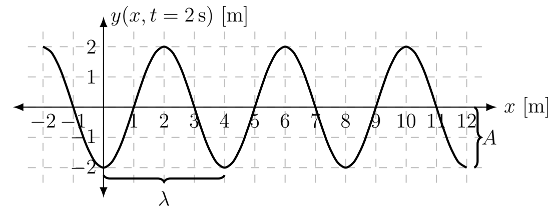
La amplitud es $A = 2\,\mathrm{m}$ pues ambos gráficos coinciden con que este es el desplazamiento vertical máximo con respecto al cero.

La longitud de onda es $\lambda = 4\,\mathrm{m}$ porque es la distancia entre dos mínimos/máximos consecutivos en el gráfico y vs. x.

El periodo de la onda es $T = 8\,\mathrm{s}$ porque es el tiempo entre dos mínimos/máximos consecutivos en el gráfico y vs. t.



iii)

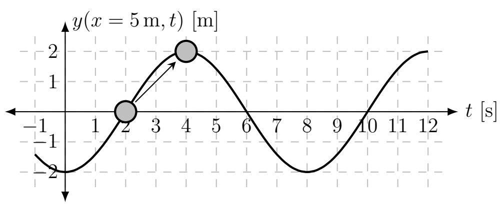


c) Encuentre la rapidez a la que viaja la onda.

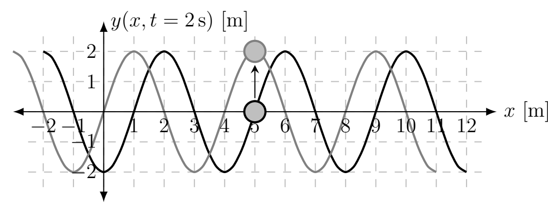
La rapidez c de una onda, su longitud de onda y frecuencia f están relacionadas por $c = \lambda f$. Por lo tanto, encontramos que la rapidez a la que viaja la onda es $c = \lambda/T = 4\,\mathrm{m}/8\,\mathrm{s} = 0.5\,\mathrm{m/s}$.

d) Encuentre el sentido (derecha o izquierda) en que se mueve la onda. Justifique su respuesta.

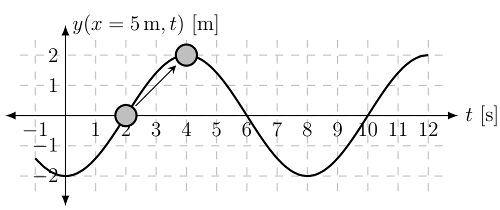
El gráfico y vs. t dice que $y(x = 5\,\mathrm{m}, t = 2\,\mathrm{s}) = 0\,\mathrm{m}$ y $y(x = 5\,\mathrm{m}, t = 4\,\mathrm{s}) = 2\,\mathrm{m}$, por lo tanto, el punto en $x = 5\,\mathrm{m}$ va subiendo en este rango de tiempo, es decir, tiene una velocidad vertical positiva. Veamos que esto solamente coincide con el sentido de propagación hacia la izquierda, en que la curva del gráfico y vs. x se traslada en $\Delta x = c\Delta t = 0.5\,\mathrm{m/s} \times 2\,\mathrm{s} = 1\,\mathrm{m}$



iii)



Notemos que si el sentido fuese hacia la derecha entonces el gráfico y vs. x daría la contradicción $y(x = 5\,\mathrm{m}, t = 4\,\mathrm{s}) = -2\,\mathrm{m}$.



iii)