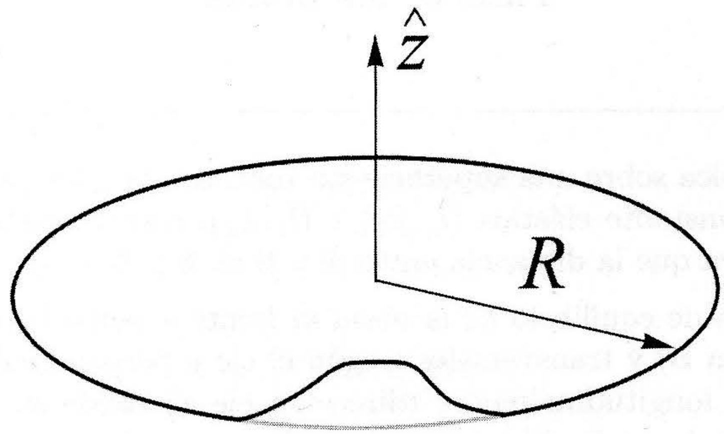
$\boxed{\boldsymbol{P3}}$. Considere una cuerda de densidad de masa por unidad de longitud μ, sometida a una tensión T, desplegada en una circunferencia de radio R. La cuerda es susceptible de ser perturbada (ligeramente) transversalmente al plano en que se encuentra según la dirección $\hat{z}$, como se muestra en la figura.

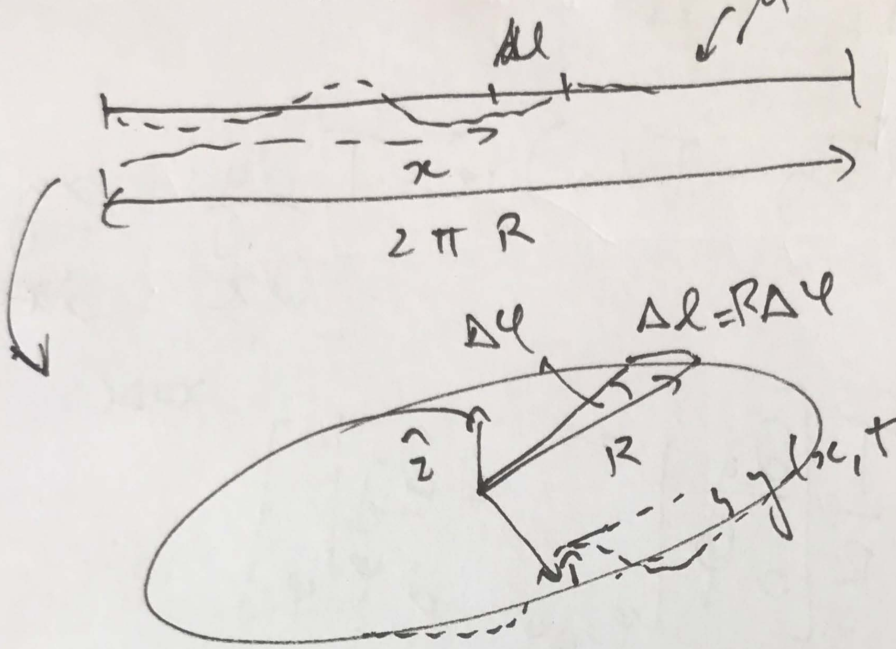
(a) Explique y escriba la ecuación de onda clásica que describe la propagación de las perturbaciones. Para esto, primero determine la variable espacial relevante para describir la propagación transversal a lo largo de la cuerda.

(b) Encuentre los modos normales (que son ondas estacionarias) de esta perturbación para la cuerda circular.

(c) Bosqueje los tres primeros modos normales de la cuerda



P3] a) Explique gráficamente la ec. de onda. (2 pts)



La tensión T, angularmente, mantiene tensa la cuerda. Un elemento de largo $\Delta l = R\Delta\varphi$, siente una diferencia de fuerza que será en la dirección angular únicamente para pequeños desplazamientos en la vertical

$$\Rightarrow \Delta l\, \mu\, \partial_{tt}\, y(x,t) = \underbrace{(F_{izq} - F_{der})\cdot\hat{z}}_{\text{en la vertical}}$$

⇒ Si es una circunferencia la [illegible] es [illegible]

en $\Delta l = R\Delta\varphi$

$$\Rightarrow (F_{izq.} - F_{der})\cdot\hat{\imath} = T\left[\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x+\Delta l} - \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x}\right]$$

$$= \frac{T}{R}\left[\left.\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right|_{\varphi+\Delta\varphi} - \left.\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right|_{\varphi}\right]$$

$$= \underbrace{\frac{T}{R}\,\frac{1}{R}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}\right)}_{\partial^2_{x^2}}\Bigg|_{\varphi}\underbrace{\Delta\varphi R}_{\Delta l}$$

$$\Rightarrow \cancel{R}\mu\cancel{\Delta\varphi}\,\partial_{tt}y = \frac{T}{R^2}\,\partial_{\varphi\varphi}y\,\cancel{R}\cancel{\Delta\varphi}$$

$$\Rightarrow \mu\,\partial_{tt}y = \frac{T}{R^2}\,\partial_{\varphi\varphi}y$$

$$\boxed{\partial_{tt} = \frac{c^2}{R^2}\,\partial_{\varphi\varphi}y}$$

b) Los modos normales son las oscilaciones espaciales estacionarias de la cuerda

Lo que importa es que la solución sea periódica en φ porque la cuerda es circunferencial!! $\Rightarrow y(x,t) = y(R\varphi, t)$

$$\Rightarrow \underline{y(x+L,t) = y(R\varphi + 2\pi R, t)}$$

Ahora si suponemos ondas estacionarias

$$\Rightarrow y(R\varphi, t) = A\cos(\omega t)\, f(R\varphi)$$

$$\Rightarrow f(R\varphi) = f(R\varphi + 2\pi R)$$

Como suponemos un movimiento armónico en el tiempo $\Rightarrow$ $f(R\varphi) = \begin{cases} \cos(KR\varphi) \\ \sin(KR\varphi) \end{cases}$

o suma de estas

Poco importa porque lo que queremos es que

$$f(R\varphi) = f(R\varphi + 2\pi R)$$

$$\Rightarrow \cos(kR\varphi) = \cos(kR\varphi + k2\pi R)$$

$$\Rightarrow k\,2\pi R = 2n\pi \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow kR = n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \boxed{k_n = \frac{n}{R} \in \mathbb{Z}} \Rightarrow \boxed{\omega_n = c\,\frac{n}{R}}$$

c) El modo $n=0$ no tiene dinámica

$n=1$

$n=2$

$n=3$