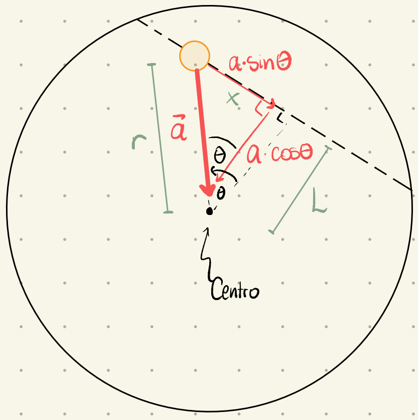
P1



Descomponiendo la aceleración, que es radial, en la dirección del tunel, tenemos que en tal direccion, que podemos definir con $\hat{\imath}$, la aceleración es

$$\vec{a}_x = -|\vec{a}| \cdot \sin\theta\, \hat{\imath} = -\frac{g}{R} r \sin\theta$$

Notamos que la distancia al centro depende del ángulo (y viceversa), donde por geometría

$$r(\theta) = \frac{L}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{R^2 - R^2/4}}{\cos\theta} = \frac{R}{2}\frac{\sqrt{3}}{\cos\theta}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_x = -\frac{g}{2}\sqrt{3}\tan\theta = -\frac{g\sqrt{3}}{2}\frac{x}{L}\hat{\imath} = -\frac{g}{R}x\hat{\imath}$$

Ahora, integremos una vez considerando que inicialmente $x(t=0) = R/2$

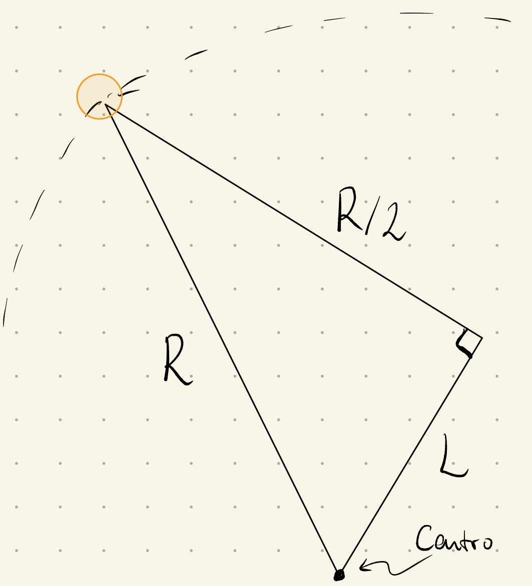


Figura 2: Posición inicial de la partícula

$$\Rightarrow \dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx} = -\frac{g}{R}x \quad / \int dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\dot{x}} \dot{x}\, d\dot{x} = -\frac{g}{R}\int_{R/2}^{x} x\, dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{\dot{x}^2}{2} = \frac{g}{2R}\left(\frac{R^2}{4} - x^2\right) \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{g}{R}}\sqrt{\frac{R^2}{4} - x^2}$$

$$\Rightarrow \int_{R/2}^{x} \frac{dx}{(R^2/4 - x^2)^{1/2}} = \pm\sqrt{\frac{g}{R}}\int_0^t dt$$

$$\Leftrightarrow \arcsin\left(\frac{2x}{R}\right)\Bigg|_{R/2}^{x} = \pm\sqrt{\frac{g}{R}}\cdot t$$

$$\Leftrightarrow \arcsin\left(\frac{2x}{R}\right) - \frac{\pi}{2} = \pm\sqrt{\frac{g}{R}}\, t$$

Queremos saber para qué tiempo $x = -R/2$

$$\Rightarrow \arcsin(-1) - \frac{\pi}{2} = \pm\sqrt{\frac{g}{R}}\, t^*$$

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\sqrt{\frac{g}{R}}\, t^* \Rightarrow t^* = \sqrt{\frac{R}{g}}\,\pi$$

Ahora, la rapidez máxima se tiene cuando la aceleración comienza a ser una fuerza que "tira hacia atrás" a la partícula, o sea, $x=0$, donde por (1)

$$\dot{x}^2(x=0) = \frac{g}{R}\frac{R^2}{4} = \frac{gR}{4} \Rightarrow |\dot{x}_{max}| = \frac{\sqrt{gR}}{2}$$

* Pueden comprobar este argumento imponiendo que la derivada de la velocidad (la aceleración sea 0

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Física
FI2001 – Mecánica

Pauta Auxiliar 5

Cinemática$_{2.5}$

Profesor: Andrés Escala
Auxiliares: Fernanda Blanc, Javier Huenupi
Ayudantes: Gerald Barnert

P2.-

Considere un poste de sección circular de radio R colocado verticalmente sobre una superficie horizontal. Una partícula de masa m se encuentra atada a una cuerda de largo L_0, cuyo otro extremo se encuentra fijo al poste. El roce entre la partícula y la **superficie horizontal** es despreciable. En un cierto instante, cuando la cuerda se encuentra estirada y en una dirección tangente al poste, se da a la partícula una velocidad inicial v_0, en dirección perpendicular a la cuerda estirada, como se indica en la Figura.

1. Determine la ecuación de movimiento de la partícula m en un **sistema de coordenadas conveniente**.
2. Obtenga la velocidad angular $\dot{\phi}$ en función del ángulo ϕ (ángulo de enrollado de la cuerda).
3. Suponga que la cuerda se corta cuando la tensión alcanza el valor $T_{\text{máx}}$, obtenga el ángulo ϕ de enrollado de la cuerda en ese momento.

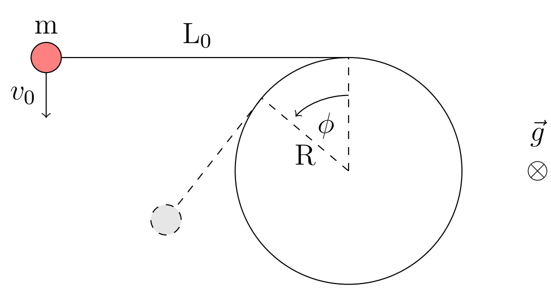


Figura 1

Respuesta

Usamos coordenadas polares para definir la posición de la masa. El origen del sistema lo ponemos en el centro del círculo (pueden ver este video para que les quede más claro a que me refiero) y tendríamos:

$$\vec{r} = R\hat{\rho} + (L_0 - R\phi)\hat{\phi},$$

donde R es la distancia al borde del círculo y el término que acompaña a $\hat{\phi}$ es el largo de la cuerda medida desde el borde del círculo, que es igual al largo original L_0 menos el tamaño del arco descrito por ϕ. Importante notar que no hay componente de altura, ya que la masa está en contacto con la superficie horizontal y la normal de esta contrarresta la fuerza de gravedad, así que siempre trabajamos en un plano.

Derivamos $\vec{r}$ con respecto al tiempo,

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}} &= R\dot{\phi}\hat{\phi} - R\dot{\phi}\hat{\phi} - (L_0 - R\phi)\dot{\phi}\hat{\rho} \\ &= -(L_0 - R\phi)\dot{\phi}\hat{\rho}.\end{aligned}$$

Recordar:

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \dot{\phi}\hat{\phi}; \quad \frac{d\hat{\phi}}{dt} = -\dot{\phi}\hat{\rho}$$

Derivamos nuevamente para encontrar la aceleración:

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{r}} &= R\dot{\phi}^2\hat{\rho} - (L_0 - R\phi)\ddot{\phi}\hat{\rho} - (L_0 - R\phi)\dot{\phi}^2\hat{\phi} \\ &= (R\dot{\phi}^2 - L_0\ddot{\phi} + R\ddot{\phi}\phi)\hat{\rho} - (L_0 - R\phi)\dot{\phi}^2\hat{\phi},\end{aligned} \tag{1}$$

con lo que conseguimos la ecuación de movimiento.

Ahora, analizando las fuerzas en los distintos componentes, tenemos:

- $\hat{\rho}$: No hay fuerzas
- $\hat{\phi}$: La tensión de la cuerda
- $\hat{k}$: Fuerza de gravedad y la normal de la superficie horizontal, que son iguales en magnitud, pero distinto signo, por lo que se anulan (no atraviesa la superficie ni comienza a subir)

$$\Rightarrow m(R\dot{\phi}^2 - L_0\ddot{\phi} + R\ddot{\phi}\phi)\hat{\rho} - m(L_0 - R\phi)\dot{\phi}^2\hat{\phi} = 0\hat{\rho} - T\hat{\phi}, \tag{2}$$

donde la tensión va en el sentido contrario hacia donde crece ϕ (jala a la masa). Con lo que podemos igualar las componentes que acompañan a los mismos vectores unitarios de (2),

$$m(R\dot{\phi}^2 - L_0\ddot{\phi} + R\ddot{\phi}\phi) = 0; \quad -m(L_0 - R\phi)\dot{\phi}^2 = -T. \tag{3}$$

Con lo que conseguimos nuestras ecuaciones de movimiento!!!!.

Cuando una expresión está igualada a 0, sospechamos que hay cosas que se conservan (a veces no es tan directo y debemos mover algunas cosas), así que notamos que la primera expresión de (3) se puede reescribir como:

$$\begin{aligned}R\dot{\phi}^2 - L_0\ddot{\phi} + R\ddot{\phi}\phi &= \frac{d}{dt}\left(-\dot{\phi}L_0 + R\dot{\phi}\phi\right) = 0 \\ \Rightarrow -\dot{\phi}L_0 + R\dot{\phi}\phi &= \text{constante}\end{aligned}$$

O sea, $\dot{\phi}L_0 - R\dot{\phi}\phi$ mantiene su valor en todo el movimiento, así que en cualquier momento debe ser igual a sus valores iniciales, donde $\phi_0 = 0$ y para $\dot{\phi}_0$ analizamos la expresión de la velocidad que expresamos al inicio:

$$\vec{v} = -(L_0 - R\phi)\dot{\phi}\hat{\rho},$$

y en $t = 0$ sabemos que la velocidad es de la forma:

$$\begin{aligned} \vec{v}_0 &= -v_0\hat{\rho} \\ \Rightarrow -v_0 &= -(L_0 - R\cdot 0)\dot{\phi}_0 \\ \Rightarrow \dot{\phi}_0 &= \frac{v_0}{L_0}, \end{aligned}$$

con esta expresión de $\dot{\phi}_0$ y ϕ_0 podemos seguir trabajando con la conservación que encontramos para obtener una expresión de $\dot{\phi}$,

$$\begin{aligned} \Rightarrow -\dot{\phi}L_0 + R\dot{\phi}\phi &= -v_0 \\ \Leftrightarrow \dot{\phi} &= \frac{v_0}{L_0 - R\phi}, \end{aligned}$$

con lo que conseguimos expresar la velocidad angular en función del ángulo.

Finalmente, en (3) tenemos una expresión para la tensión en función del ángulo y la velocidad angular que podemos reemplazar con lo conseguido,

$$\Rightarrow T = m(L_0 - R\phi)\left(\frac{v_0}{L_0 - R\phi}\right)^2 = \frac{mv_0^2}{L_0 - R\phi}.$$

Notamos que T crece cuando aumentamos ϕ desde $\phi_0 = 0$, hasta que $L_0 - R\phi_1 = 0$, donde el valor de la tensión explota, así que, según enunciado, la cuerda se cortaría en este punto $\phi_1 = L_0/R$.

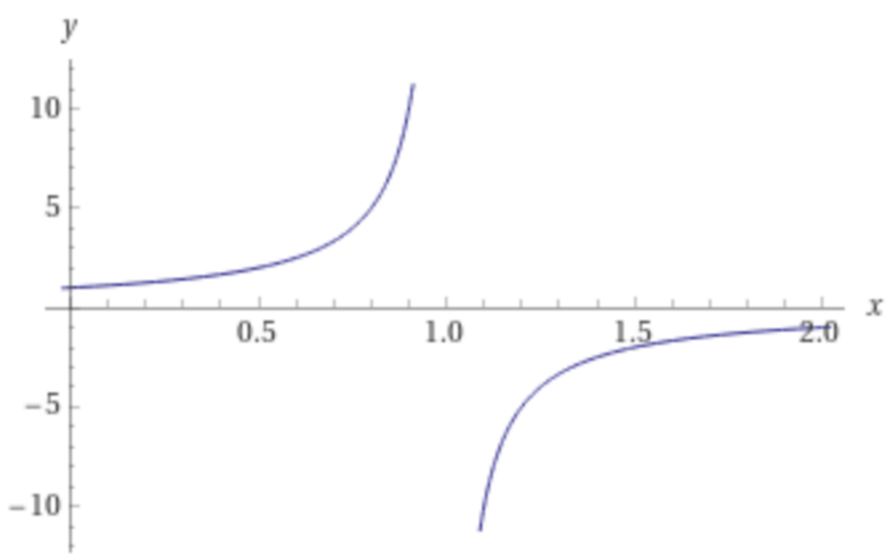


Figura 2: Forma de T, para $m = v_0 = R = L_0 = 1$