Control 1

P1

(a) (i) En cilíndricas con $z=0$ tendríamos la ec.

$$m\left((\ddot{\rho}-\rho\dot{\theta}^2)\hat{\rho}+(2\dot{\rho}\dot{\theta}+\rho\ddot{\theta})\hat{\theta}\right)=f(r)\hat{\rho}-c(\dot{\rho}\hat{\rho}+\rho\dot{\theta}\hat{\theta})$$

Por lo que nuestras ecs. de movimiento escalares serían

$$\hat{\rho})\quad m(\ddot{\rho}-\rho\dot{\theta}^2)=f(r)-c\dot{\rho}$$

$$\hat{\theta})\quad m(2\dot{\rho}\dot{\theta}+\rho\ddot{\theta})=-c\rho\dot{\theta}$$

(ii) Hacemos el producto cruz

$$\vec{r}\times\vec{v}=\rho\hat{\rho}\times(\dot{\rho}\hat{\rho}+\rho\dot{\theta}\hat{\theta})=\rho\dot{\rho}\,\cancel{\hat{\rho}\times\hat{\rho}}^{\,0}+\rho^2\dot{\theta}\,\overbrace{\hat{\rho}\times\hat{\theta}}^{\hat{k}}$$

$$=\rho^2\dot{\theta}\hat{k}$$

$$\Rightarrow J=\|\vec{r}\times\vec{v}\|=\|\rho^2\dot{\theta}\hat{k}\|=\rho^2\dot{\theta}$$

(b) De $\hat{\theta})$ tenemos que podemos reescribirla como (estamos buscando una ec. de mov. para J)

$$\frac{m}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\theta})=-c\rho\dot{\theta}$$

$$\Leftrightarrow\quad\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\theta})=-\frac{c}{m}\rho^2\dot{\theta}$$

$$\Leftrightarrow\quad\frac{d(J)}{dt}=-\frac{c}{m}J$$

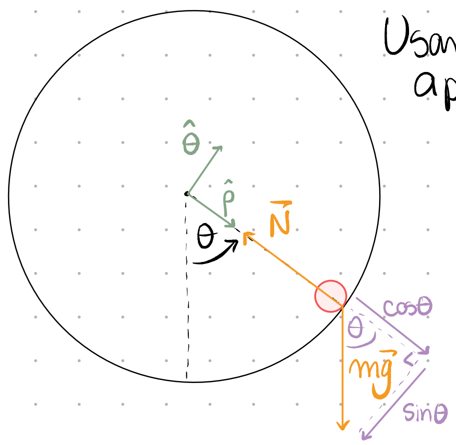
$$\Rightarrow\int_{J_0}^{J}\frac{dJ}{J}=-\frac{c}{m}\int_0^t dt$$

$$\Leftrightarrow\ln\left(\frac{J}{J_0}\right)=-\frac{c}{m}t\Leftrightarrow J(t)=J_0e^{-\frac{c}{m}t}$$

Donde vemos que J, el momentum angular, decrece exponencialmente con el tiempo (haciéndose 0 en $t\to\infty$) debido a la fuerza de roce que le quita energía al sistema.

Notamos que este decaimiento es independiente de $f(r)$, ya que esta es una fuerza central (apunta en la dirección de $\hat{\rho}$), por lo tanto conservativa.

P2



Usamos coord. polares centradas en el centro del cilindro. Las fuerzas aplicadas sobre la partícula son

- Normal: $\vec{N} = -N\hat{\rho}$
- Gravedad: $m\vec{g} = mg\cos\theta\,\hat{\rho} - mg\sin\theta\,\hat{\theta}$

La ec. de movimiento vectorial sería

$$m\left((\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\hat{\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\hat{\theta}\right) = -N\hat{\rho} + mg\cos\theta\,\hat{\rho} - mg\sin\theta\,\hat{\theta}$$

Considerando $\rho = R$, $\dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$, las ecs. mov. escalares serían

$\hat{\rho}$) $-mR\dot{\theta}^2 = -N + mg\cos\theta$

$\hat{\theta}$) $mR\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \Rightarrow \cancel{m}R\dot{\theta}\dfrac{d\dot{\theta}}{d\theta} = -\cancel{m}g\sin\theta$

$$\Rightarrow \int_{\dot{\theta}_0}^{\dot{\theta}} \dot{\theta}\,d\dot{\theta} = -\frac{g}{R}\int_0^{\theta} \sin\theta\,d\theta$$

$$\Leftrightarrow \frac{\dot{\theta}^2}{2} - \frac{\dot{\theta}_0^2}{2} = \frac{g}{R}(\cos\theta - 1)$$

donde para un mov. circular $\vec{v} = \cancel{\dot{\rho}}\hat{\rho} + R\dot{\theta}\hat{\theta} = R\dot{\theta}\hat{\theta}$ e inicialmente $\vec{v}_0 = v_0\hat{\theta}$

$$\Rightarrow R\dot{\theta}_0 = v_0 \Leftrightarrow \dot{\theta}_0 = \frac{v_0}{R}$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}^2 = 2\frac{g}{R}(\cos\theta - 1) + \frac{v_0^2}{R^2} = 2\frac{g}{R}(\cos\theta - 1) + \frac{7}{2}gR\frac{1}{R^2} = 2\frac{g}{R}\cos\theta + \frac{3}{2}\frac{g}{R}$$

reemplazando en $\hat{\rho}$)

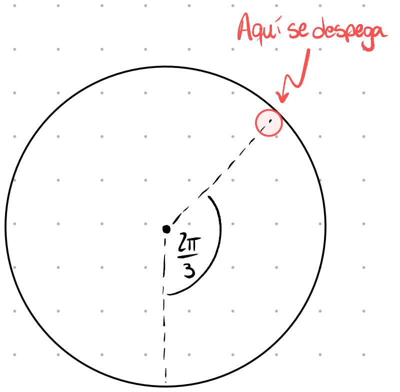
$$\Rightarrow -mR\left(2\frac{g}{R}\cos\theta + \frac{3}{2}\frac{g}{R}\right) = -N + mg\cos\theta$$

$$\Leftrightarrow N(\theta) = 3mg\cos\theta + \frac{3}{2}mg$$

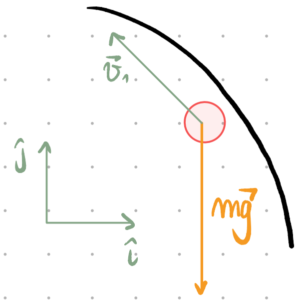
Para que se separe la partícula necesitamos imponer $N(\theta^*) \overset{!}{=} 0$

$$\Rightarrow \cancel{3}\cancel{mg}\cos\theta^* + \cancel{\frac{3}{2}}\cancel{mg} \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\theta^* = -\frac{1}{2} \Rightarrow \theta^* = \frac{2\pi}{3} \qquad (= 120°)$$



(b) Ahora, después de despegarse, la partícula solo está bajo efecto de la gravedad, por lo que cambia la dinámica. Utilizemos cartesianas



$$m(\ddot{x}\hat{\imath} + \ddot{y}\hat{\jmath}) = -mg\hat{\jmath}$$

$$\Rightarrow \ddot{y} = -g \Rightarrow \dot{y} = \dot{y}_0 - gt$$

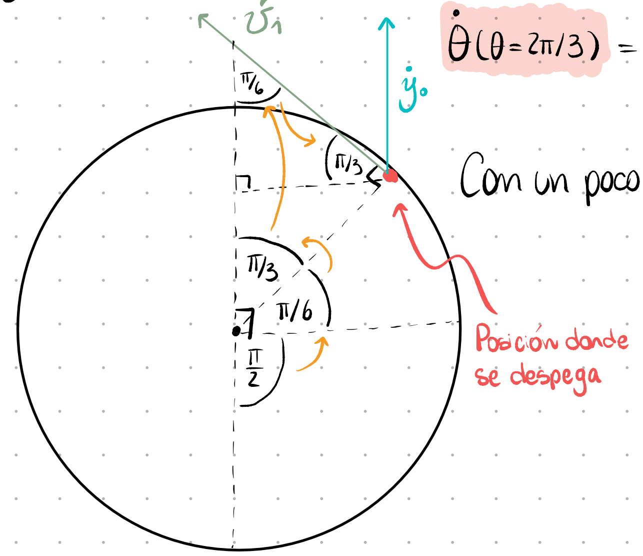
velocidad inicial en $\hat{j}$

Y alcanza su altura máx. cuando $\dot{y}(t^{**}) = 0 \Rightarrow t^{**} = \frac{\dot{y}_0}{g}$

Para calcular la velocidad inicial en $\hat{j}$ utilizemos que encontramos

$$\dot{\theta}^2(\theta) = 2\frac{g}{R}\cos\theta + \frac{3}{2}\frac{g}{R}$$

y en el momento que se despega solo tiene velocidad tangencial (en $\hat{\theta}$), evaluemos



$$\dot{\theta}(\theta = 2\pi/3) = \sqrt{\frac{2g}{R}\cdot -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\frac{g}{R}} = \sqrt{-\frac{g}{R} + \frac{3}{2}\frac{g}{R}} = \sqrt{\frac{g}{2R}}$$

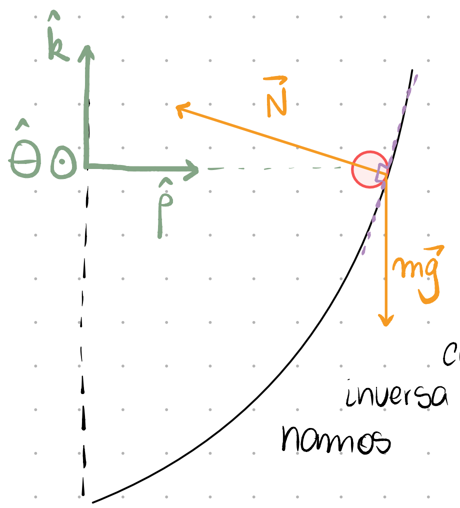
Con un poco de geometría encontramos que

$$\dot{y}_0 = v_1 \sin\pi/3 \quad , \text{ con } v_0 = R\dot{\theta}(2\pi/3)$$

$$= R\sqrt{\frac{g}{2R}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow t^{**} = \sqrt{\frac{3R}{8g}}$$

*Las flechas indican el orden en el que se definieron los ángulos

P3



(b) Tenemos solo dos fuerzas actuando sobre la partícula

- Gravedad: $m\vec{g} = -mg\hat{k}$
- Normal: $\vec{N} = N_\rho \hat{\rho} + N_z \hat{k}$

Nos dicen que la altura es cte. $z = h \Rightarrow \dot{z} = \ddot{z} = 0$, además como tenemos que $z = f(\rho) \Rightarrow \rho = f^{-1}(z)$ con f^{-1} la función inversa de f, por lo que si z es constante $\Rightarrow f^{-1}(z)$ es cte., así que definamos

$$\rho_0 \equiv f^{-1}(h) \Rightarrow \dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$$

Escribamos la ec. de mov. vectorial

$$m\left((\cancel{\ddot{\rho}} - \rho\dot{\theta}^2)\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\theta})\hat{\theta} + \cancel{\ddot{z}}\hat{k} \right) = -mg\hat{k} + N_\rho\hat{\rho} + N_z\hat{k}$$

$$\Rightarrow m\left(-\rho_0\dot{\theta}^2\hat{\rho} + \frac{1}{\cancel{\rho_0}}\frac{d}{dt}(\rho_0^{\cancel{2}}\dot{\theta})\hat{\theta} \right) = -mg\hat{k} + N_\rho\hat{\rho} + N_z\hat{k}$$

Y en su forma escalar

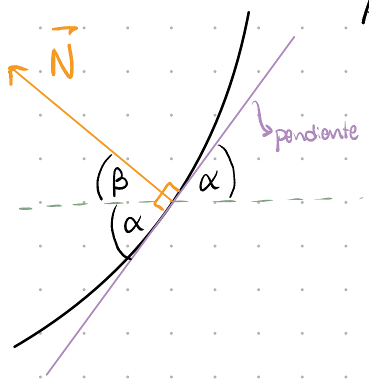
$\hat{\rho}$) $-m\rho_0\dot{\theta}^2 = N_\rho$

$\hat{\theta}$) $\dfrac{d\dot{\theta}}{dt} = 0$, velocidad angular cte.

$\hat{k}$) $0 = -mg + N_z$

(c) La velocidad angular la tendríamos de $\hat{\rho}$) si tuviésemos N_ρ. Esta normal está estrechamente relacionada a N_z, ya que ambas vienen de $\vec{N}$.

Recordando que la normal es perpendicular a la superficie, en particular es perpendicular a la tangente a la superficie en el punto en el que se encuentra la partícula. La tangente en su forma infinitesimal está dada por la derivada df/dr



Además tenemos que $\tan\alpha = \dfrac{df}{dr}$ y que $\beta = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$

$$\Rightarrow \tan\alpha = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \frac{1}{\tan\beta} = \frac{df}{dr}$$

Y tenemos que descomponiendo $\vec{N}$ en $\hat{\rho}$ y $\hat{k}$

- $N_\rho = -N\cos\beta$
- $N_z = N\sin\beta$

$$\Rightarrow \frac{1}{\tan\beta} = \frac{\cos\beta}{\sin\beta} = \frac{-N_\rho/\cancel{N}}{N_z/\cancel{N}} = \frac{-N_\rho}{N_z} = \frac{df}{dr} \iff N_\rho = -N_z \cdot \frac{df}{dr} = -N_z\frac{dz}{dr}$$

Y por $\hat{k}$) tenemos que $N_z = mg \Rightarrow N_\rho = -mg\frac{dz}{dr}$. Ahora sí, reemplazando en $\hat{\rho}$)

$$-m\rho_0\dot{\theta}^2 = -mg\frac{dz}{dr}$$

$$\Leftrightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{g}{\rho_0}\frac{dz}{dr} \Rightarrow \omega = \dot{\theta} = \sqrt{\frac{g}{\rho_0}\frac{dz}{dr}}$$, con $\rho_0 = f^{-1}(h)$ conocido

(d) Simplemente reemplazamos

Martini $z=r$: $\omega = \sqrt{\frac{g}{h}}$, donde h es la altura de la partícula

Vino $z = H(r/R)^2$: $\omega = \sqrt{\frac{g}{R\cancel{\sqrt{h/H}}} \cdot \frac{2H}{R^2} \cdot \cancel{R\sqrt{\frac{h}{H}}}} = \sqrt{\frac{2gH}{R^2}}$

(e) Depende de la forma de las copas, ya que si H es muy grande y R muy pequeño ($H/R \gg 1$) se tiene que $\omega_v \gg \omega_M$. Además, ω_v es independiente de la altura de la partícula h, por lo que si posicionamos a la partícula en una posición muy alta $\omega_M \ll \omega_v$