Pauta Auxiliar #3:

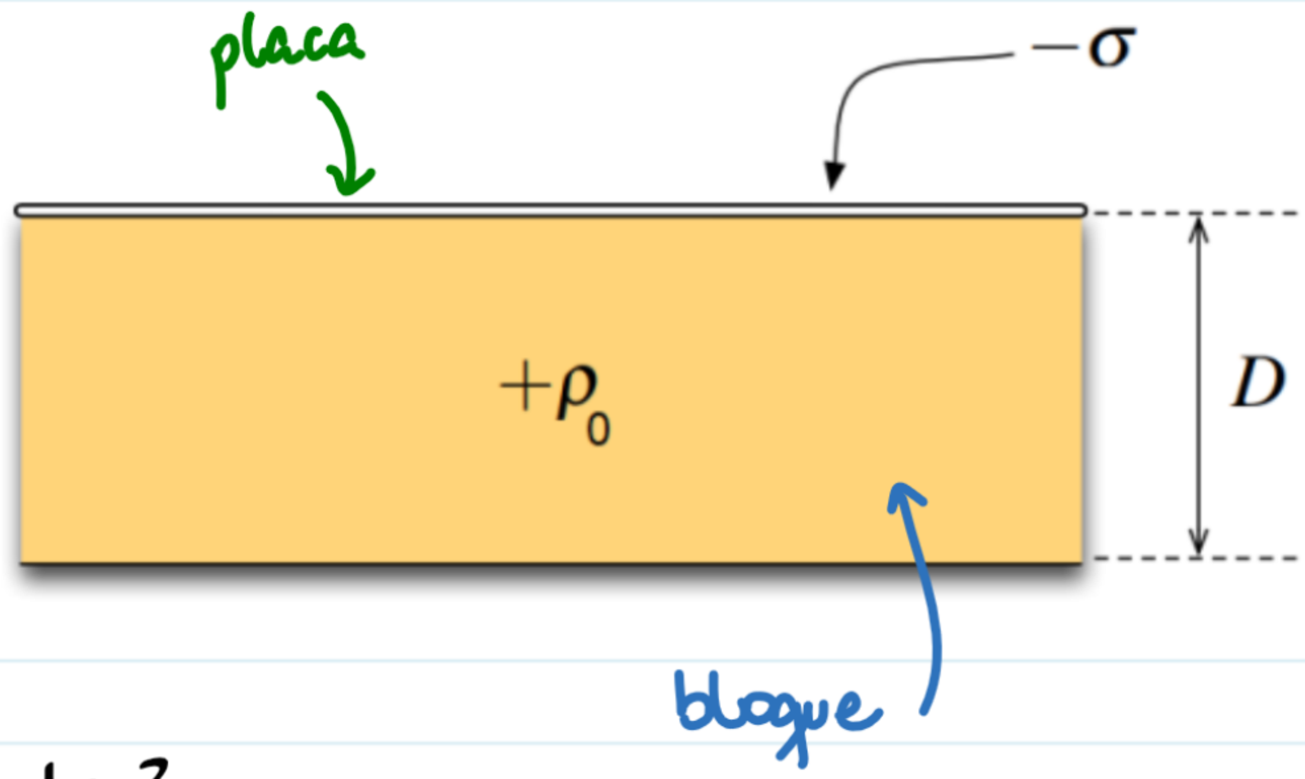
P1. Se tiene una placa infinita no conductora de espesor despreciable la cual posee una densidad superficial de carga $-\sigma_0$, y pegada a ella, un bloque infinito de espesor D con una densidad de carga uniforme $+\rho_0$. Considere que todas las cargas están fijas. Calcule la dirección y la magnitud del campo eléctrico:

- a) Arriba de la placa infinita.
- b) Dentro del bloque.
- c) Debajo del bloque.

Tenemos 2 distribuciones de carga que generan campo eléctrico: placa y bloque.
→ Usaremos el ppio. de superposición para calcular cada campo por separado, y luego los sumamos para obtener el campo total.

* Para calcular ambos campos usaremos la LEY DE GAUSS:

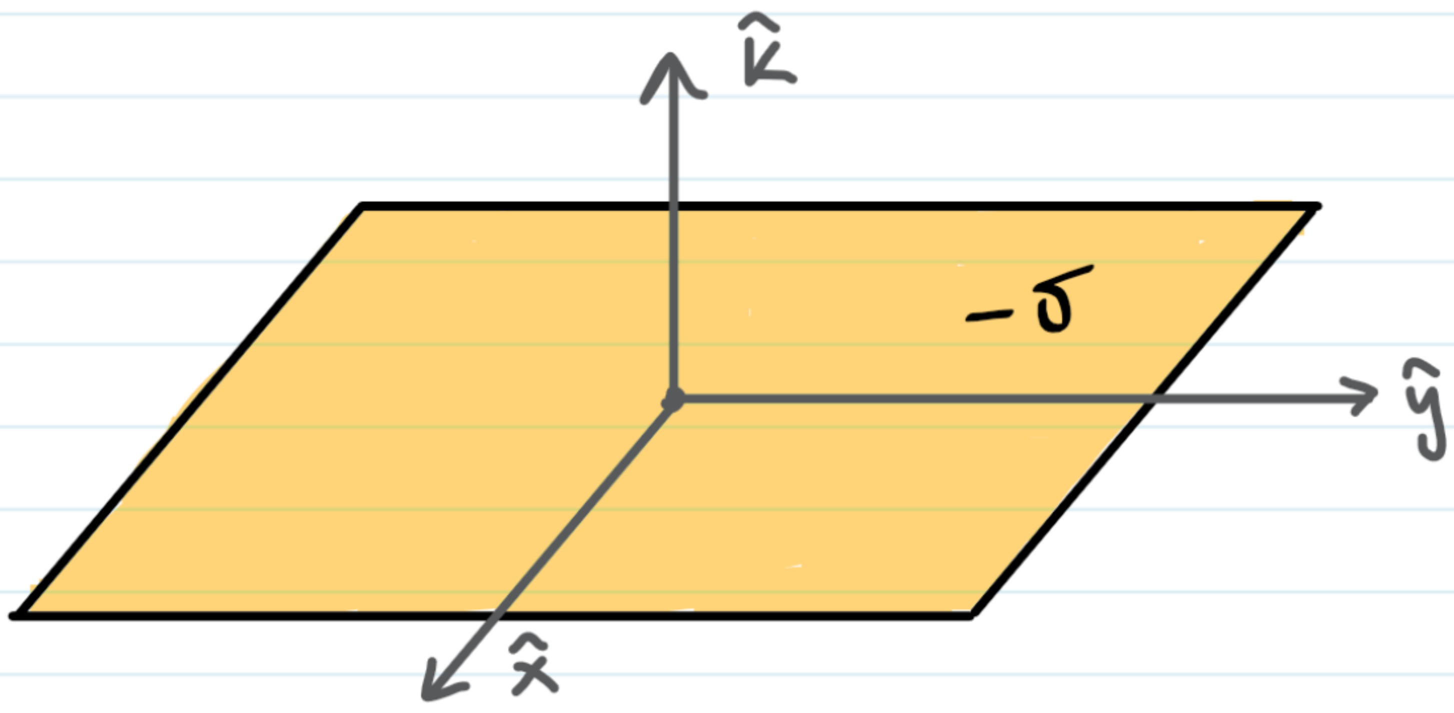
$$\boxed{\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}}$$



... para lo cual es fundamental decir cosas sobre la simetría del campo eléctrico:
↳ ¿de qué coordenadas depende? ¿hacia dónde apunta?

---

1) Placa: $\vec{E}_{placa}$



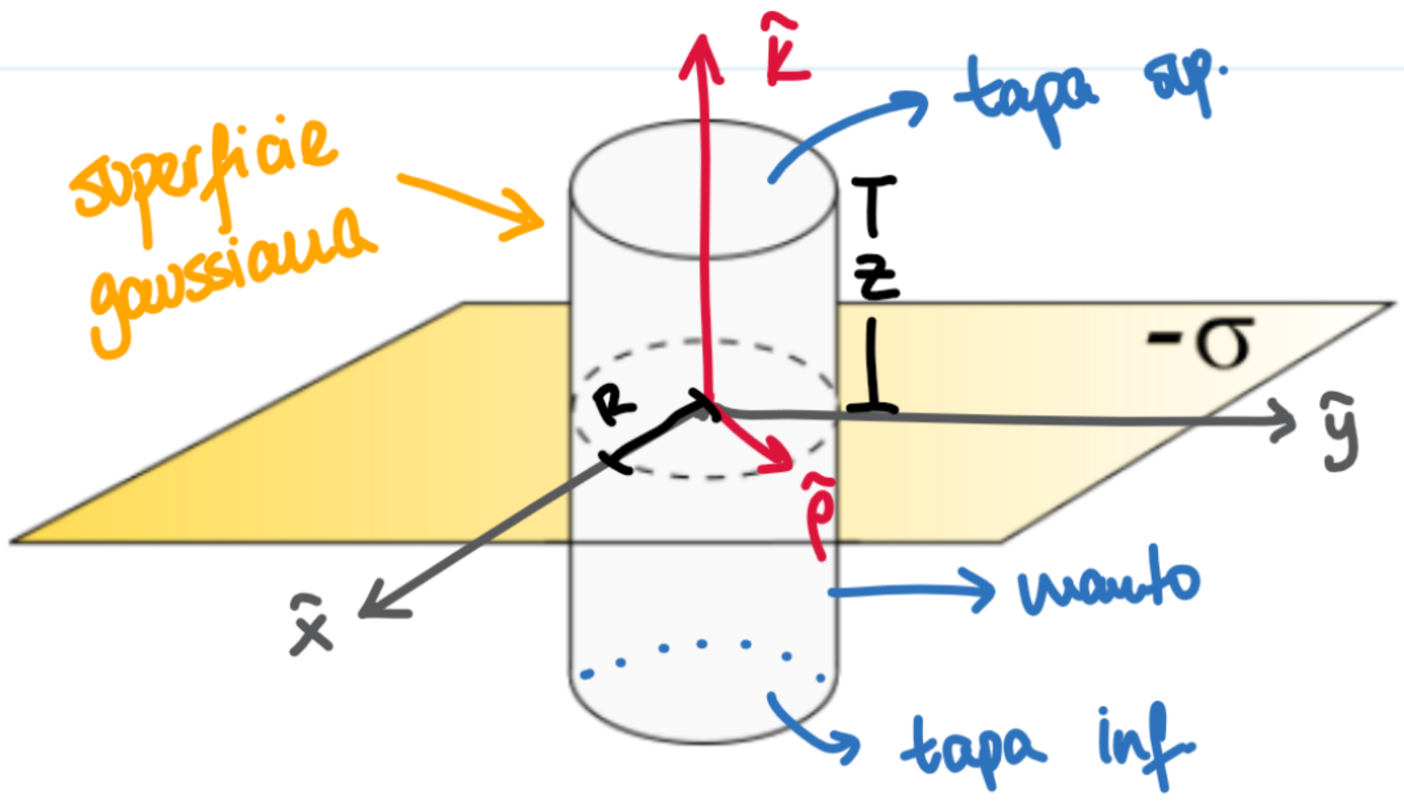
- Como la placa es infinita en el plano XY (ver dibujo), el campo **no** puede depender de x ó y (en coord. cartesianas), pues eso significaría que hay zonas del plano que son "especiales" (por ej: que tienen más carga que las otras, pero la densidad superficial $-\sigma$ es uniforme!), lo que no tendría sentido.

↳ Solo puede depender de z (qué tan lejos estamos de la placa): $E(x,y,z) = E(z)$

- Por el mismo argumento de arriba, $\vec{E}$ no puede apuntar ni en $\hat{x}$ ni en $\hat{y}$, solo en $\hat{k}$:

$$\Longrightarrow \text{Por simetría, } \boxed{\vec{E}_{placa} = E(z)\,\hat{k}}$$

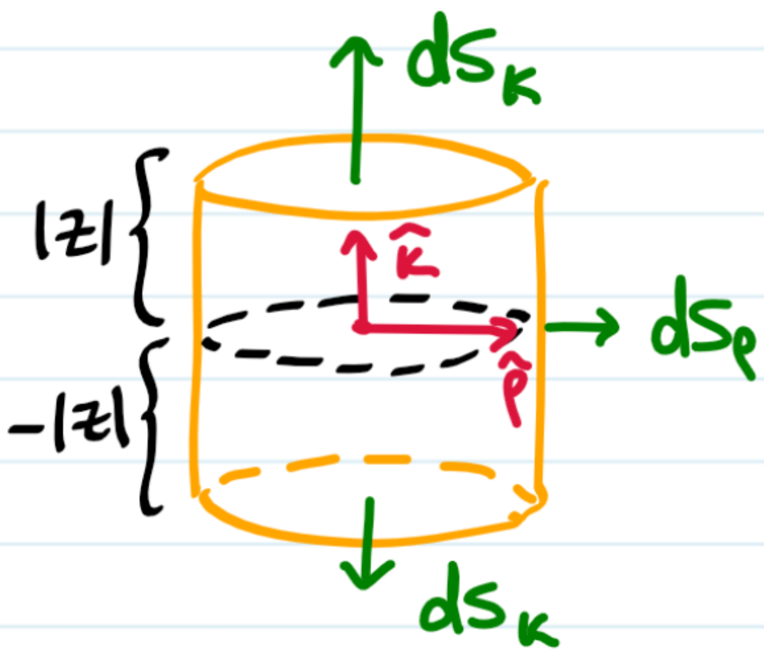
Ahora sí usemos Gauss: tenemos que elegir una superficie gaussiana que encierre carga.



→ Aprovechando la simetría de $\vec{E}$ en el plano XY, usaremos coord. cilíndricas y un cilindro de radio R y altura 2z como superficie gaussiana.

- Ahora calculemos el flujo $\Phi = \oint \vec{E}\cdot d\vec{s}$ (lado izq. de la ley de Gauss).

$$\Phi = \underset{\text{superficie cilindro}}{\oint \vec{E}\cdot d\vec{s}} \underset{\text{separamos por superficies}}{=} \underset{\text{tapa superior}}{\int \vec{E}\cdot d\vec{s}} + \underset{\text{manto}}{\int \vec{E}\cdot d\vec{s}} + \underset{\text{tapa inferior}}{\int \vec{E}\cdot d\vec{s}}$$



$$= \underset{\text{tapa superior}}{\int E(|z|)\hat{k}\cdot(ds_k\,\hat{k})} + \underset{\text{manto}}{\int E(z)\hat{k}\cdot\cancel{(ds_\rho\,\hat{\rho})}} + \underset{\text{tapa inferior}}{\int E(-|z|)\hat{k}\cdot(ds_k\cdot(-\hat{k}))}$$

0 pues $\hat{k}\cdot\hat{\rho} = 0$

se evalúa el campo en la superficie.

↳ la superficie apunta hacia abajo en el eje $\hat{k}$.

Reemplazando que $dS_k = \rho d\rho d\phi$ y que $\hat{k}\cdot\hat{k} = 1$, entonces:

OJO!

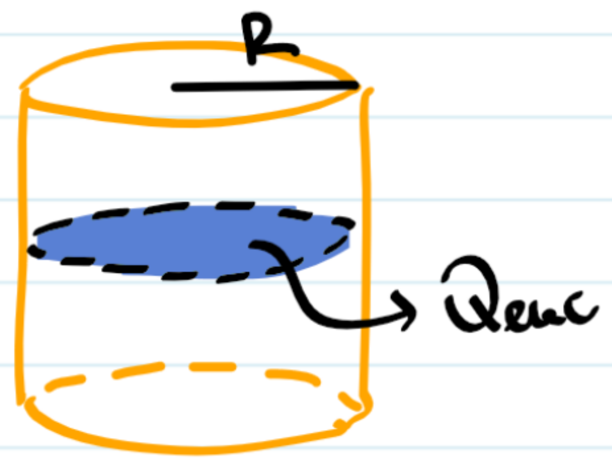
$$\Phi = \int_0^R\int_0^{2\pi} E(|z|)\rho d\rho d\phi - \int_0^R\int_0^{2\pi} E(-|z|)\rho d\rho d\phi$$

Aquí está la gracia de la LEY DE GAUSS: la integral es en $d\rho$ y $d\phi$ pero E no dep. de ρ ni ϕ $\Rightarrow$ puede salir de la integral!

$$= \left[E(|z|) - E(-|z|)\right]\cdot\int_0^R \rho d\rho \cdot \int_0^{2\pi} d\phi$$

También por simetría, $E(-|z|) = -E(|z|)$ y entonces:

$$\Phi = 2E(|z|)\cdot\frac{R^2}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\pi = 2E(|z|)\cdot\pi R^2 \quad \dots (1)$$



Solo falta calcular la carga encerrada en esa superficie:

$$Q_{enc} = \iint(-\sigma)\cdot dS = (-\sigma)\cdot(\pi R^2) \quad \dots (2)$$

área de un círculo de radio R

Así finalmente, reemplazando (1) y (2) en la ley de Gauss tenemos:

colocar el vector

$$\Phi = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \Rightarrow 2E(|z|)\cdot\cancel{\pi R^2} = \frac{(-\sigma)\cdot(\cancel{\pi R^2})}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{\vec{E}_{placa}(|z|) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\cdot\hat{k}}$$

y entonces resumimos el resultado como (recordar que $E(-|z|) = -E(|z|)$):

$$\vec{E}_{placa}(z) = \begin{cases} -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\cdot\hat{k} & \text{sobre la placa} \\ +\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\cdot\hat{k} & \text{bajo la placa} \end{cases} \quad (*)$$

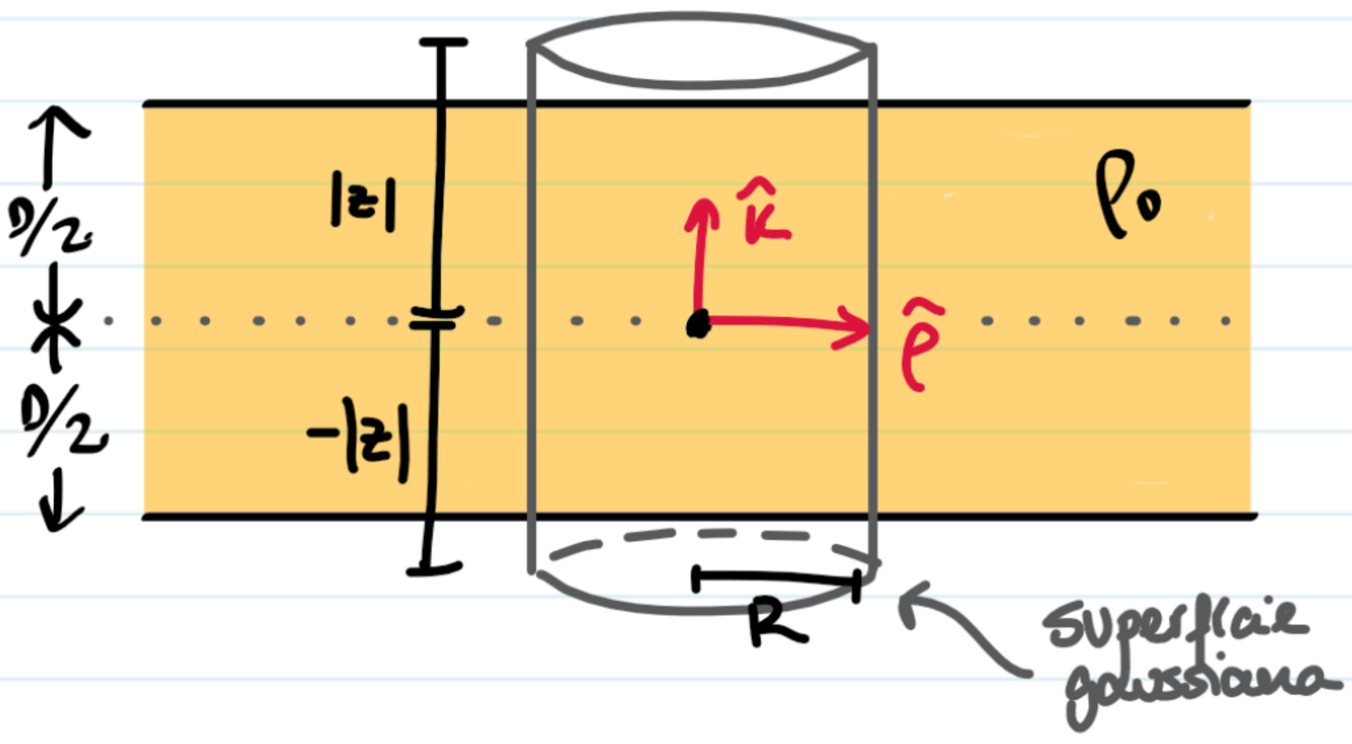
// mismo resultado Aux 1.

Ahora calculemos el campo del bloque:

2) Bloque: $\vec{E}_{bloque}$

- Por los mismos argumentos de simetría usados para el plano: $\boxed{\vec{E}_{bloque} = E(z)\hat{k}}$

... así que nuevamente usaremos coord. cilíndricas y un cilindro como sup. gaussiana, nuevamente de radio R y altura 2z, con origen en la mitad del bloque:



→ Con esto, calculamos el flujo:

$$\underbrace{\Phi = \oint \vec{E}\cdot d\vec{S}}_{\text{superficie cilindro}} \underset{\text{mismo desarrollo de arriba}}{=} 2E(|z|)\cdot\pi R^2 \quad \dots (3)$$

- Nos falta calcular la carga encerrada: tenemos que distinguir 2 casos:

i) $|z| < D/2$: el cilindro está contenido en el bloque.

$$\Rightarrow Q_{enc} = \iiint \rho_0 \cdot dV = \underbrace{\rho_0\cdot(\pi R^2)\cdot(2z)}_{\text{volumen cilindro}} \quad \dots (4)$$

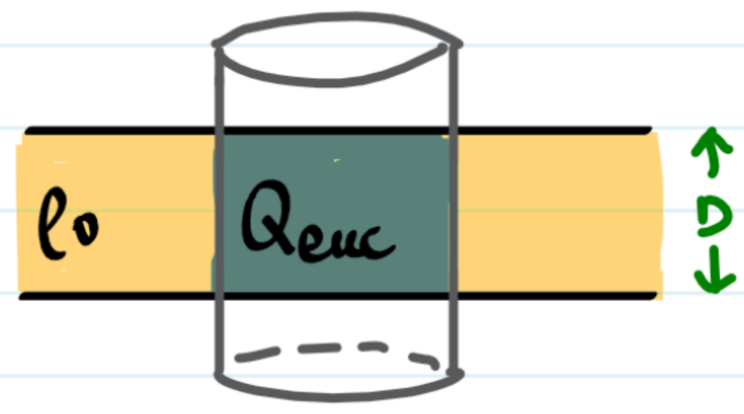
Y entonces reemplazando (3) y (4) en la ley de Gauss tenemos:

$$\Rightarrow \Phi = \cancel{2} E(|z|) \cdot \cancel{\pi R^2} = \frac{\cancel{2} \rho_0 \cancel{\pi R^2} z}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{\vec{E}_{bloque}(z) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \cdot z \hat{k}}$$

↳ CAMPO DEL BLOQUE DENTRO DE ÉL.

* Notar que el signo de $\vec{E}$ lo da z directamente ◡

ii) $|z| > D/2$: Ahora la carga encerrada solo es un volumen de un cilindro de altura D:



$$\Rightarrow Q_{enc} = \rho_0 \cdot (\pi R^2) \cdot D \quad \ldots (5)$$

Reemplazando (5) y (3) en la ley de Gauss:

$$\Rightarrow \Phi = 2E(|z|) \cdot \cancel{\pi R^2} = \frac{\rho_0 \cancel{\pi R^2} D}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{\vec{E}_{bloque}(|z|) = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \cdot D \hat{k}}$$

y entonces como ahora el signo no lo da z, entonces por simetría notamos que $E(-|z|) = -E(|z|)$ y podemos resumir el campo del bloque como:

$$\vec{E}_{bloque}(z) = \begin{cases} +\dfrac{\rho_0}{2\epsilon_0} \cdot D \hat{k} & \text{sobre el bloque } (z > D/2) \\ \dfrac{\rho_0}{\epsilon_0} z \hat{k} & \text{dentro del bloque } (|z| < D/2) \\ -\dfrac{\rho_0}{2\epsilon_0} \cdot D \hat{k} & \text{debajo del bloque } (z < -D/2) \end{cases} \qquad (**)$$

Así finalmente, juntando (*) y (**) podemos concluir por superposición ($\vec{E}_{tot} = \vec{E}_{placa} + \vec{E}_{bloque}$)

① ARRIBA DE LA PLACA ($z > D/2$):

$$\vec{E}_{tot} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \hat{k} + \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} D \cdot \hat{k} = \frac{1}{2\epsilon_0} (\rho_0 - \sigma) \hat{k} \quad //$$

② DENTRO DEL BLOQUE ($-D/2 < z < D/2$):

$$\vec{E}_{tot} = +\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \hat{k} + \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \cdot z \hat{k} = \frac{1}{\epsilon_0} \left(\frac{\sigma}{2} + \rho_0 z\right) \hat{k} \quad //$$

③ DEBAJO DEL BLOQUE ($z < -D/2$):

$$\vec{E}_{tot} = +\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \hat{k} - \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} D \cdot \hat{k} = -\frac{1}{2\epsilon_0} (\rho_0 - \sigma) \hat{k} \quad //$$

Obs. finales: Notar que Gauss solo funciona para calcular $\vec{E}$ cuando tiene simetría, y en el fondo lo que hacemos es "despejar" E de la igualdad.

→ Para ello, la superficie de Gauss debe ser tq. E sea constante en la superficie, y así no dependerá de las variables de integración (denle una vuelta a esto último).