Pauta P1 C2

a) Por simetría: $\vec{J} = J(z)\hat{z}$ y $\vec{E} = E(z)\hat{z}$

→ Estado estacionario ⇒ $\dfrac{\partial J}{\partial z} = 0$ ⇒ $J = C\hat{k}$; c cte **+0,5**

→ $J = g\vec{E}$ ⇒ $\vec{E} = \dfrac{J}{g} = J \cdot \eta(z) = C \cdot (\eta_0 + \eta_1 e^{-z/d})$ **+0,5**

Aplicando definición de potencial:

$$V_0 = -\int_0^L \vec{E} \cdot d\vec{z} = -\int_0^L C(\eta_0 + \eta_1 e^{-z/d})\,dz = -C\left[\eta_0 L + \eta_1 d\left(1 - e^{-L/d}\right)\right]$$

⇒ $C = \dfrac{-V_0}{\eta_0 L + \eta_1 d\,(1 - e^{-L/d})}$ **+1,0**

$$\begin{cases} \vec{J} = \dfrac{-V_0}{\eta_0 L + \eta_1 d\,(1 - e^{-L/d})}\hat{z} \\[2ex] \vec{E} = \dfrac{-V_0\,(\eta_0 + \eta_1 e^{-z/d})}{\eta_0 L + \eta_1 d\,(1 - e^{-L/d})}\hat{z} \end{cases}$$ **+1,0**

b) Usando que

$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{a} \vec{J}\,d\vec{S}$ ⇒ $I = \dfrac{V_0 \pi a^2}{\eta_0 L + \eta_1 d(1 - e^{-L/d})}$ **+0,5**

y luego con $V = IR$ ⇒ $R = \dfrac{\eta_0 L + \eta_1 d(1 - e^{-L/d})}{\pi a^2}$ **+0,5**

c) Primero se calcula $\vec{D}$

→ $\vec{D} = \dfrac{-V_0\,(\eta_0 + \eta_1 e^{-z/d})\varepsilon_0}{\eta_0 L + \eta_1 d\,(1 - e^{-L/d})}$

⇒ $\rho_\ell = \nabla \cdot \vec{D} = \dfrac{V_0 \varepsilon_0 \eta_1 e^{-z/d}}{d[\eta_0 L + \eta_1 d(1 - e^{-L/d})]}$ **+0,5**

Para las superficiales se usa $\vec{D}\cdot\hat{n} = \sigma_\ell$

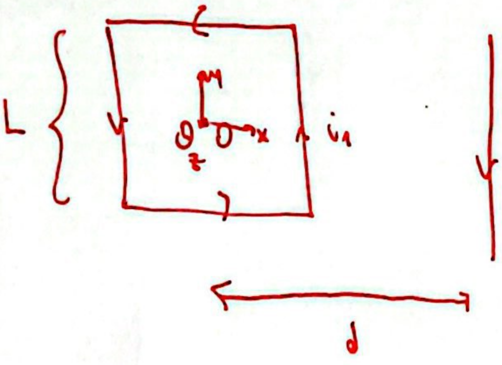
$$\begin{cases} \sigma_{sup} = \dfrac{-V_0\left(n_0 + n_1 e^{-L/d}\right)\varepsilon_0}{n_0 L + n_1 d\left(1-e^{-L/d}\right)} \\[2ex] \sigma_{inf} = \dfrac{V_0\left(n_0 + n_1\right)\varepsilon_0}{n_0 L + n_1 d\left(1-e^{-L/d}\right)} \end{cases}$$

+0,5

d) Se producirá un reordenamiento de cargas durante un periodo de tiempo, hasta que las cargas se anulen de tal forma que se tenga $\vec{E}=0$. Esto ocurre debido a que ya no hay un potencial externo que mantenga el movimiento de cargas.

+1,0

Parte P2



a) Por simetría, basta calcular 1 lado y multiplicar por 4 (+0,5)

$\vec{r} = 0$; $\vec{r}' = \frac{L}{2}\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$, $y \in [-L/2, L/2]$ con $L = \sqrt{5}$ (+0,5)

$$\Rightarrow \vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{i_1 dy \hat{\jmath} \times \left(0 - \left(\frac{L}{2}\hat{\imath} + y\hat{\jmath}\right)\right)}{\|0 - \frac{L}{2}\hat{\imath} - y\hat{\jmath}\|^3}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 \hat{k} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{L/2}{\sqrt{L^2/4 + y^2}^3} dy$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 \frac{L}{2} \hat{k} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dy}{\sqrt{L^2/4 + y^2}^3} \quad / \; y = \frac{L}{2}\tan\theta$$

$$\Rightarrow dy = \frac{L}{2}\sec^2\theta \, d\theta$$

(+1,0)

$$= \frac{\mu_0}{8\pi} i_1 L \hat{k} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\cancel{\frac{L}{2}} \sec^2\theta \, d\theta}{\underbrace{\sqrt{\cancel{\frac{L^2}{4}} + \cancel{\frac{L^2}{4}}\tan^2\theta}}_{\sec\theta}^3} = \frac{\mu_0}{2 \cdot 8\pi} i_1 \cancel{L} \hat{k} \cdot \frac{1}{\frac{L^3}{4}} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\cancel{\sec^2\theta}}{\cancel{\sec^3\theta}} d\theta$$

$\cos\theta$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i_1}{L} \hat{k} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cancel{\cos\theta \, d\theta}$$

$2 \sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$

$$\Rightarrow \vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i_1}{L} \hat{k} \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \vec{B}_{T0T} = 4\vec{B}_1 = \frac{2\mu_0\sqrt{2}}{\pi\sqrt{5}} i_1 \hat{k}$$

Tomás Va.
20.589.628-7

b) Campo del hilo: 2 opciones:

Ampère:

$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I \quad / \; \vec{B} = B(\rho)\hat{\phi}$

$\Rightarrow \int_0^{2\pi} B\hat{\phi}\cdot \rho\, d\phi\hat{\phi} = \mu_0 i_2$

$\Leftrightarrow -B\rho\cdot 2\pi = \mu_0 i_2 \Rightarrow \vec{B} = -\frac{\mu_0 i_2}{2\pi\rho}\hat{\phi} \xrightarrow[-\hat{\phi}=-\hat{k}]{\rho=d} \boxed{\vec{B}' = -\frac{\mu_0 i_2}{2\pi d}\hat{k}}$

1,0

Definición: Misma integral que antes pero $y\in(-\infty,\infty)$, y $d\vec{l} = -dy\hat{j}$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{-i_2\, dy\,\hat{j}\times(0-d\hat{\imath}-y\hat{j})}{\|0-d\hat{\imath}-y\hat{j}\|^3} = \frac{-\mu_0}{4\pi} i_2 d\hat{k}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{(d^2+y^2)^{3/2}} \quad / \text{ mismo CV}$$

$$= \frac{-\mu_0}{4\pi} i_2 d\hat{k}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{d\sec^2\theta\, d\theta}{d^3(1+\tan^2\theta)^{3/2}}$$

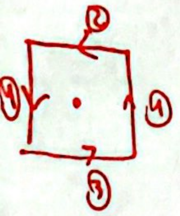
$$= \frac{-\mu_0}{\cancel{4\pi}_{\,2}}\frac{i_2}{d}\hat{k}\,\cancel{\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta\, d\theta} \rightarrow 2\sin\frac{\pi}{2} = 2$$

$$\vec{B}' = -\frac{\mu_0 i_2}{2\pi d}\hat{k}$$

1,0

$$\vec{B} + \vec{B}' \stackrel{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2\cancel{\mu_0} i_1 \sqrt{2}}{\cancel{\pi} L} = \frac{\cancel{\mu_0} i_2}{2\cancel{\pi} d} \Rightarrow \boxed{i_2 = \frac{4\sqrt{2}\, i_1 d}{\sqrt{3}}} \quad +1{,}0$$

c) Para calcular la fuerza, vamos por



$$\vec{F} = \oint I\, d\vec{l} \times \vec{B} = \int_{①} i_1 d\vec{l} \times \vec{B} + \int_{②} i_1 d\vec{l} \times \vec{B} + \int_{③} i_1 d\vec{l} \times \vec{B} + \int_{④} i_1 d\vec{l} \times \vec{B}$$

$\underline{①:}$ $$\int_{-L/2}^{L/2} i_1 dy\, \hat{j} \times \frac{-\mu_0 i_2}{2\pi(d-L/2)} \hat{k} = -\frac{i_1 i_2 \mu_0}{2\pi(d-L/2)} \hat{\imath} \underbrace{\int_{-L/2}^{L/2} dy}_{L} = -\frac{i_1 i_2 \mu_0 L}{2\pi(d-L/2)} \hat{\imath} \quad +0{,}5$$

$\underline{②:}$ $$\int_{L/2}^{-L/2} i_1 dx\, \hat{\imath} \times \frac{-\mu_0 i_2}{2\pi(d-x)} \hat{k}$$, pero $$③ = \int_{-L/2}^{L/2} i\, dx\, \hat{\imath} \times \frac{-\mu_0 i_2}{2\pi(d-x)}$$

$$\Rightarrow \int_{②} + \int_{③} = 0 \ ! \quad +1{,}0$$

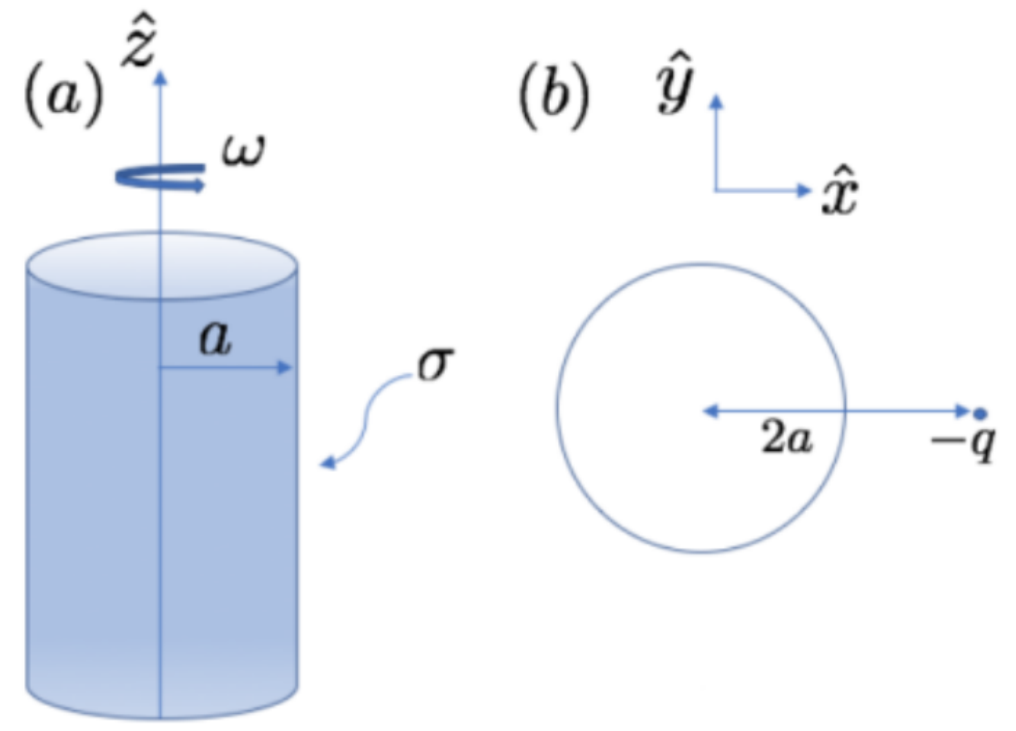
$\underline{④:}$ $$\int_{L/2}^{-L/2} i_1 dy\, \hat{j} \times \frac{-\mu_0 i_2}{2\pi(d+L/2)} \hat{k} = \frac{+\mu_0 i_1 i_2}{2\pi(d+L/2)} \hat{\imath} \underbrace{\int_{L/2}^{-L/2} dy}_{+L} = \frac{\mu_0 i_1 i_2 L}{2\pi(d+L)} \hat{\imath} \quad +0{,}5$$

$$\Rightarrow \vec{F} = \int_{①} i_1 d\vec{l} \times \vec{B} + \cancel{\int_{②} i_1 d\vec{l} \times \vec{B} + \int_{③} i_1 d\vec{l} \times \vec{B}} + \int_{④} i_1 d\vec{l} \times \vec{B} = \hat{\imath}\, \frac{\mu_0 i_1 i_2 L}{2\pi} \overbrace{\left(\frac{1}{d + L/2} - \frac{1}{d - L/2} \right)}^{= \frac{-L}{d^2 - L^2/4}}$$

$$\boxed{\vec{F}_{tot} = -\frac{\mu_0 i_1 i_2 L^2}{2\pi(d^2 - L^2/4)} \hat{\imath}}$$

P3. Una superficie cilíndrica de radio a y longitud infinita está cargada eléctricamente con una densidad superficial uniforme σ (considere $\sigma > 0$). La superficie gira alrededor de su eje de simetría con velocidad angular ω (ver figura a), de manera que desde un sistema de referencia en reposo se observa una densidad superficial de corriente en el cilindro, cuya expresión en coordenadas cilíndricas es $\vec{K} = \sigma a \omega \hat{\phi}$. Adicionalmente, como consecuencia de la densidad de carga eléctrica, se origina un campo eléctrico dado por la siguiente expresión:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & \text{para } \rho < 0 \\ \dfrac{a\sigma}{\epsilon_0 \rho}\hat{\rho} & \text{para } \rho > 0 \end{cases} \qquad (1)$$



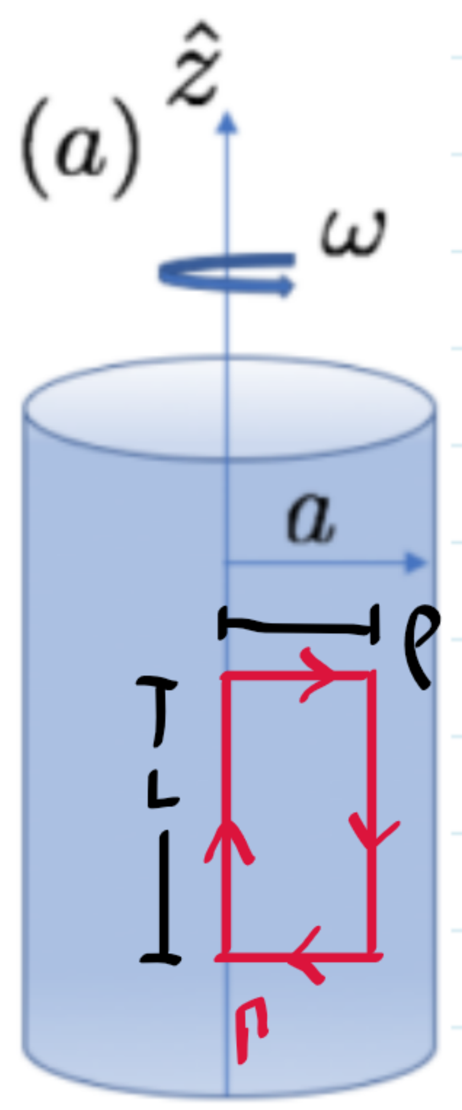
a) Calcule el campo magnético $\vec{B}$ en todo el espacio (dentro y fuera del cilindro) (3 pts.)

Como se trata de un cilindro infinito y $\vec{K}$ tiene simetría cilíndrica, podemos usar la ley de Ampère:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot I_{enc} \leftarrow \text{coord cilíndricas}$$

* Por simetría, podemos decir que $\vec{B} = B(\rho)\hat{z}$ ← regla mano derecha

(+0,3)



1) $\rho < a$:

→ Tomemos un loop amperiano Γ de lados ρ y L:

$$\Rightarrow \oint_\Gamma \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_0^L (B(\rho=0)\hat{z})\cdot(dz\hat{z}) + \int_0^\rho \cancelto{0}{(B(\rho)\hat{z})\cdot(d\rho\hat{\rho})} \qquad \hat{z}\cdot\hat{\rho} = 0$$

$$+ \int_0^L (B(\rho)\hat{z})\cdot(-dz\hat{z}) + \int_0^\rho \cancelto{0}{(B(\rho)\hat{z})\cdot(-d\rho\hat{\rho})}$$

$$\Rightarrow \oint_\Gamma \vec{B}\cdot d\vec{l} = L\left[B(0) - B(\rho)\right] \qquad (+0,5)$$

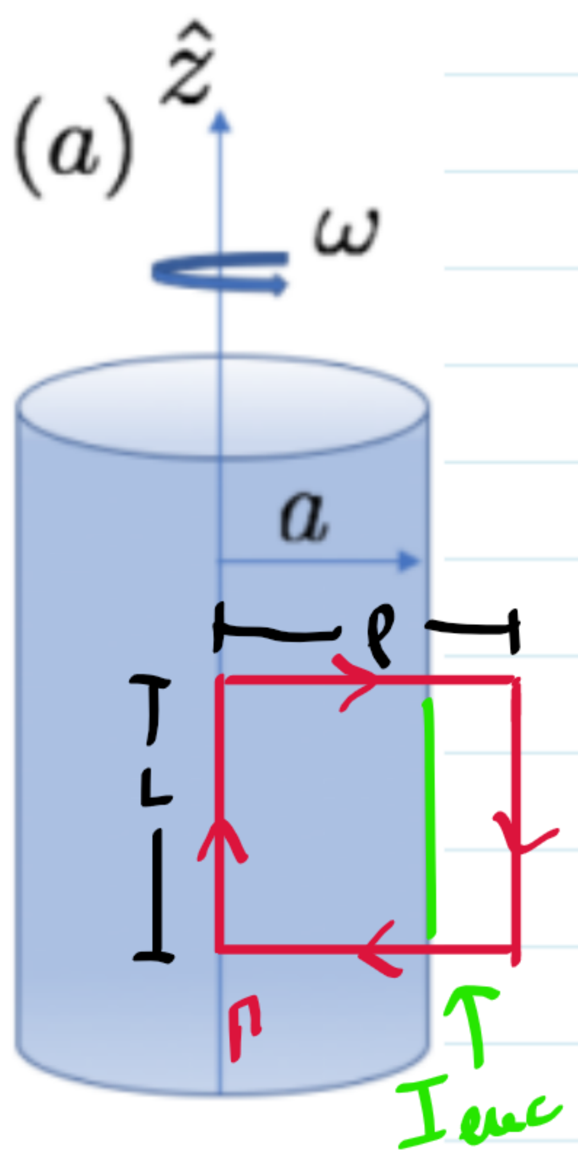
Luego, $I_{enc} = 0$ en este caso pues toda la corriente es superficial!

$$\Rightarrow \oint_\Gamma \vec{B}\cdot d\vec{l} = L\left[B(0) - B(\rho)\right] \overset{!}{=} \mu_0 \cdot \cancelto{0}{I_{enc}} = 0$$

$$\Rightarrow B(0) = B(\rho < a) \ \ldots (1)$$

↗ el campo dentro del cilindro es cte $= B(0)$

(+0,5)



2) $\rho > a$: $\oint_\Gamma \vec{B}\cdot d\vec{l} = L[B(0) - B(\rho)]$ igual que antes

↙ normal a la sup. del ⌸

... pero ahora, $I_{enc} = \int (\vec{K}\times\hat{n})\cdot(d\vec{l})$ con $\hat{n} = \hat{\rho}$; $d\vec{l} = dz\hat{z}$

$$\Rightarrow I_{enc} = \int_0^L (\sigma a\omega\cdot(-\hat{z}))\cdot(dz\hat{z}) = -\sigma a \omega L \qquad (+0,5)$$

y entonces: $\cancel{L}\left[B(0) - B(\rho)\right] \overset{!}{=} -\mu_0 \sigma a \omega \cancel{L}$

... continua

y entonces: $B(\rho>a) = \mu_0 \sigma a \omega - B(0)$ ... (2) ← notar que $B(\rho>a) = cte$! (+0,5)

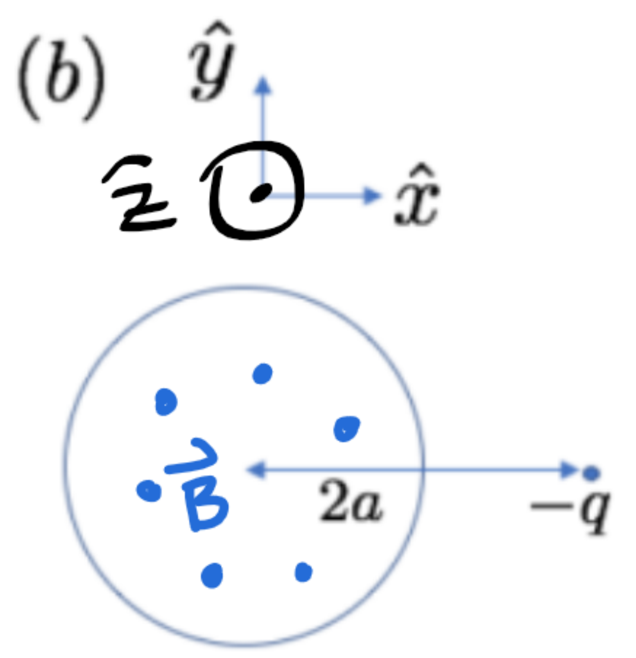
¿$B(0)$? Como en $\rho = \infty$ el campo $\vec{B}$ debería ser cero y $B(\rho>a)$ nos dio cte

$\Rightarrow B(\rho>a) \overset{!}{=} 0 \quad \underset{(2)}{\Rightarrow} \quad \boxed{\mu_0 \sigma a \omega = B(0)}$ (+0,5)

Reemplazando $B(0)$ en (1) entonces $\Rightarrow B(\rho<a) = \mu_0 \sigma a \omega$ y entonces:

$$\boxed{\vec{B} = \begin{cases} \mu_0 a \omega \sigma \hat{z} & \text{si } \rho < a \\ 0 & \text{si } \rho > a \end{cases}}$$ (+0,2 concluir)

Una partícula de carga negativa $-q$ y de masa m se suelta desde el reposo en $\vec{r} = 2a\hat{x}$ (ver figura b).



b) Describa cualitativamente el movimiento de la partícula (suponga que la partícula puede atravesar libremente al cilindro) y dibuje las trayectorias de acuerdo a la magnitud del campo magnético. Específicamente discuta qué sucede para campos magnéticos muy intensos y muy débiles (1 pt.)

La partícula de carga $-q$ se deja en $\vec{r} = 2a\hat{x}$. Eso es fuera del cilindro
$\Rightarrow$ ahí no hay campo magnético pero sí campo eléctrico.

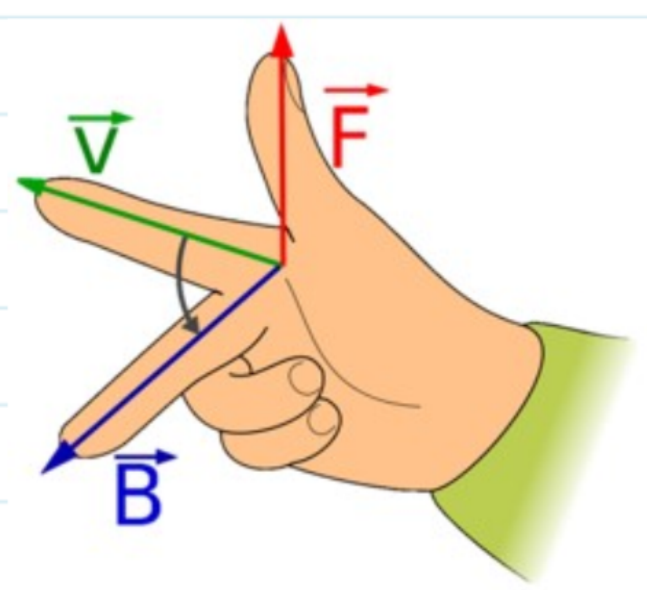
$\Rightarrow$ La partícula siente una Fuerza de Coulomb $\vec{F} = -q \cdot \vec{E} = -q \frac{a\sigma}{\varepsilon_0 x} \hat{x}$

$\Rightarrow$ Inicialmente, la partícula se moverá en $-\hat{x}$ hacia el cilindro. (en línea recta) (+0,2)

• Una vez que $-q$ atraviese el cilindro, dejará de sentir $\vec{E}$ y ahora sentirá $\vec{B}$

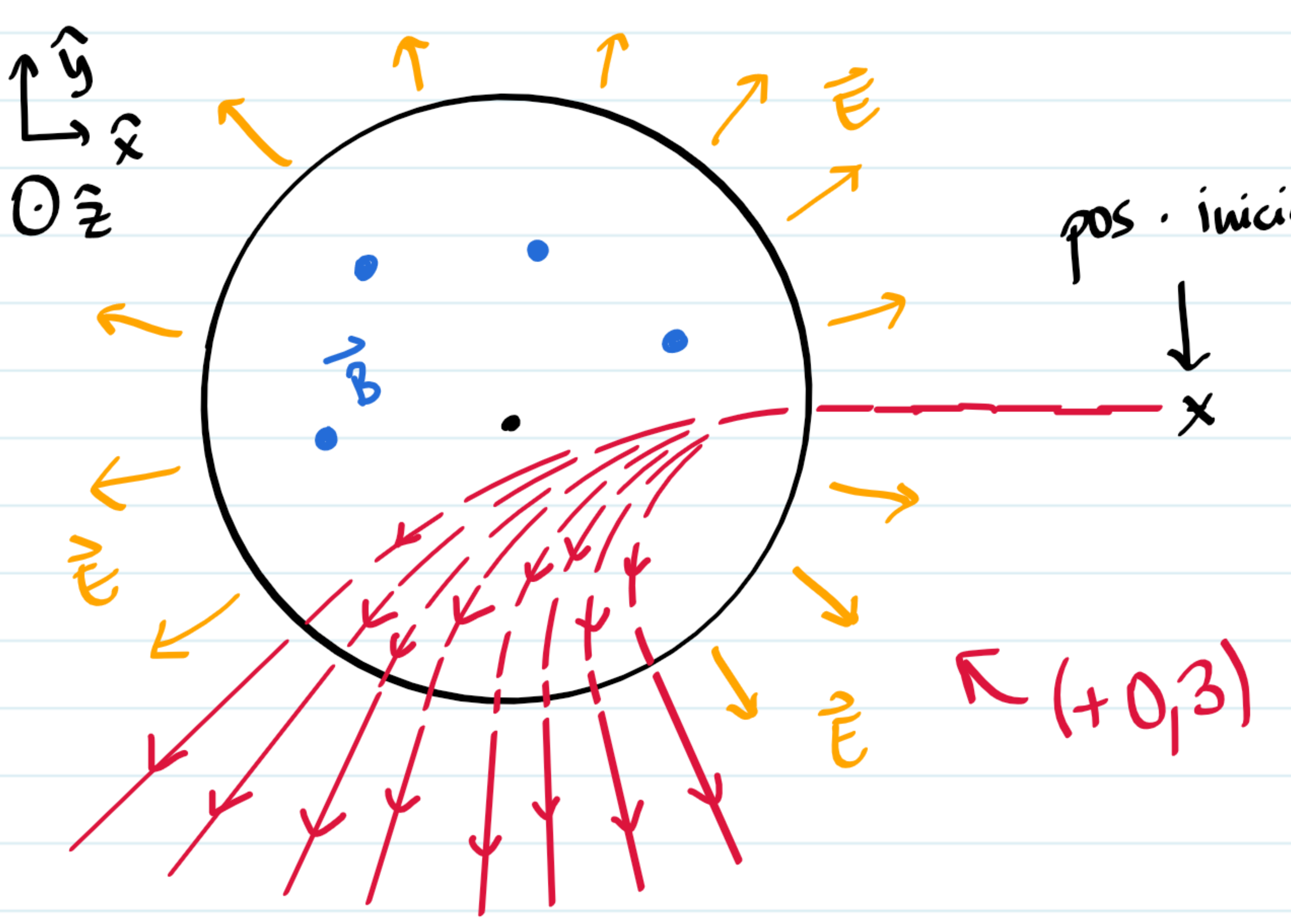
$\Rightarrow$ sentirá una fuerza de Lorentz $\vec{F} = -q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$ con $\vec{v} = v(-\hat{x})$

Luego, por la regla de la mano IZQUIERDA (carga $-q$), el mov. de la partícula se curvará hacia el eje $-\hat{y}$! (+0,3)



↳ mano derecha.

$\Rightarrow$ Dependiendo del valor de $\vec{B}$, las trayectorias se verán así.



(+0,3)

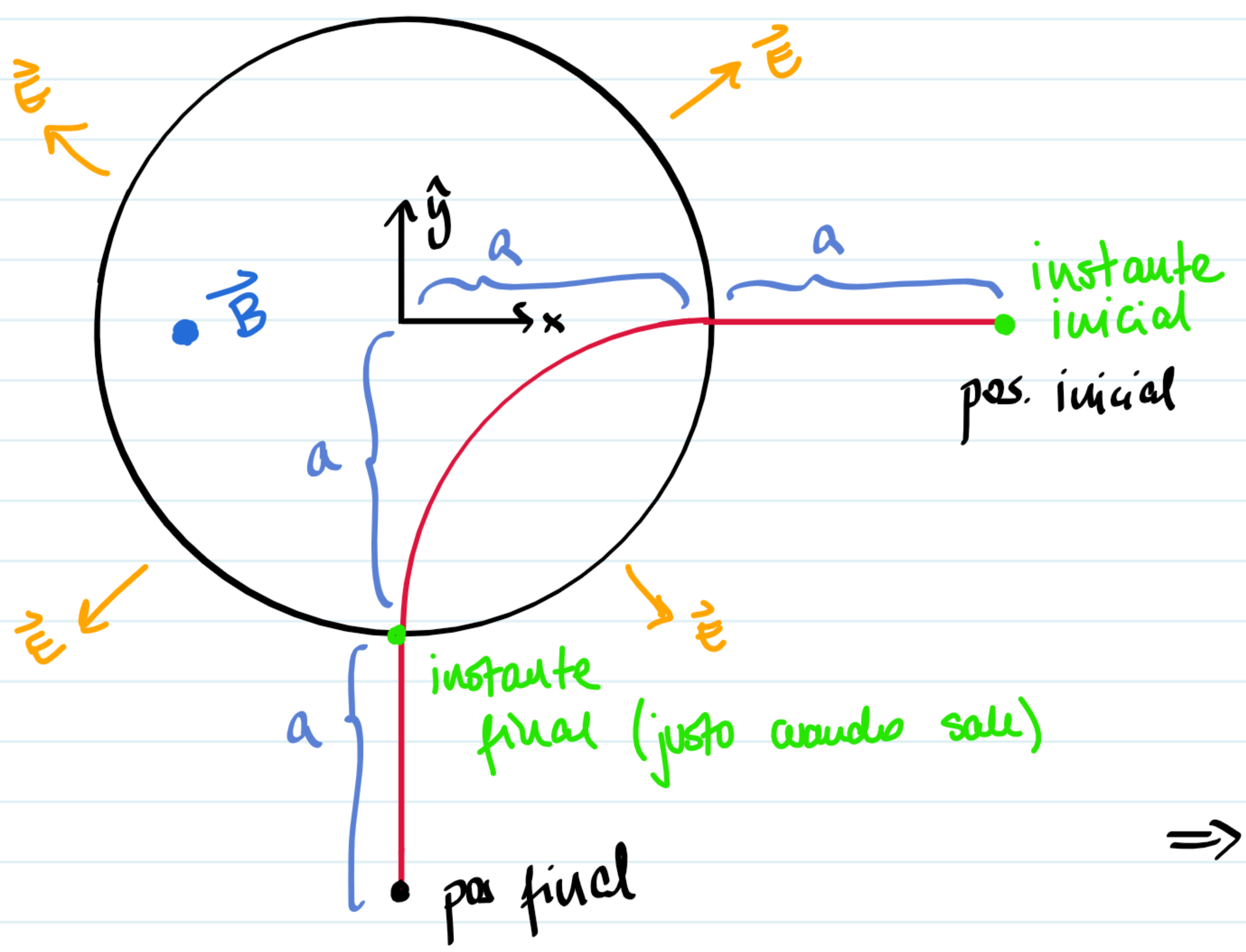
→ Una vez que $-q$ sale del cilindro, deja de sentir $\vec{B}$ y vuelve a sentir $\vec{E}$

$\Rightarrow$ Continuará su movimiento en línea recta, pero la fuerza de Coulomb la frenará hasta que quede en reposo, y se repita el ciclo. (+0,2)

c) Determine la velocidad angular ω con la que debe girar el cilindro para que la partícula pueda llegar a la posición $\vec{r} = 2a\hat{y}$. (2 pts.)

<u>Hint</u>: Podría serle útil usar la conservación de la energía.

Queremos que ocurra esto



→ Usemos conservación de la energía entre los instantes inicial y final.

↳ en esos instantes solo tenemos campo $\vec{E}$ así que tenemos:

i) Energía cinética:

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

ii) Energía electrostática:

$$U = -q \cdot V$$

$\Rightarrow$ Para ii) necesitamos el potencial V

Por definición, $V(\rho)$ es:

$$V(\rho) - V(\rho_0) = -\int_{\rho_0}^{\rho} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_{\rho_0}^{\rho} \left(\frac{\sigma a}{\epsilon_0 \rho}\hat{\rho}\right) \cdot (d\rho\hat{\rho}) = -\frac{\sigma a}{\epsilon_0}\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{\sigma a}{\epsilon_0}\ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)$$

Obs: no podemos tomar $\rho_0 = 0$ (pot. de ref. en ∞) pues V diverge ya que el cilindro es infinito $\Rightarrow$ lo dejaremos así para algún ρ_0 arbitrario, tq $V(\rho_0) = 0$

$$\Rightarrow \boxed{V(\rho) = -\frac{\sigma a}{\epsilon_0}\ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)} \quad (+0,5)$$

Ahora calculemos E_i y E_f:

- $E_i = \frac{1}{2}m\cancel{v_i^2} + (-q)V(\rho = 2a) = \frac{q\sigma a}{\epsilon_0}\ln\left(\frac{2a}{\rho_0}\right)$ ← energía inicial

  0 reposo

- $E_f = \frac{1}{2}mv_f^2 + (-q)V(\rho = a) = \frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{q\sigma a}{\epsilon_0}\ln\left(\frac{a}{\rho_0}\right)$ ← energía final

$$\Rightarrow \Delta E = E_f - E_i \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{q\sigma a}{\epsilon_0}\ln\left(\frac{a}{\rho_0}\right) - \frac{q\sigma a}{\epsilon_0}\ln\left(\frac{2a}{\rho_0}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_f^2 = \frac{q\sigma a}{\epsilon_0}\ln\left(\frac{2\cancel{a}}{\cancel{a}}\right) = \frac{q\sigma a}{\epsilon_0}\ln(2)$$

$$(+0,5) \quad \Rightarrow \boxed{v_f = \sqrt{\frac{2q\sigma a}{m\epsilon_0}\ln(2)}} \rightarrow \text{rapidez al salir del cilindro.} \quad (1)$$

Teniendo v_f, notemos que para que $-q$ llegue a $\vec{r} = -2a\hat{y}$, debe salir del cilindro justo por $\vec{r} = -a\hat{y}$ ya que al salir, se moverá en línea recta

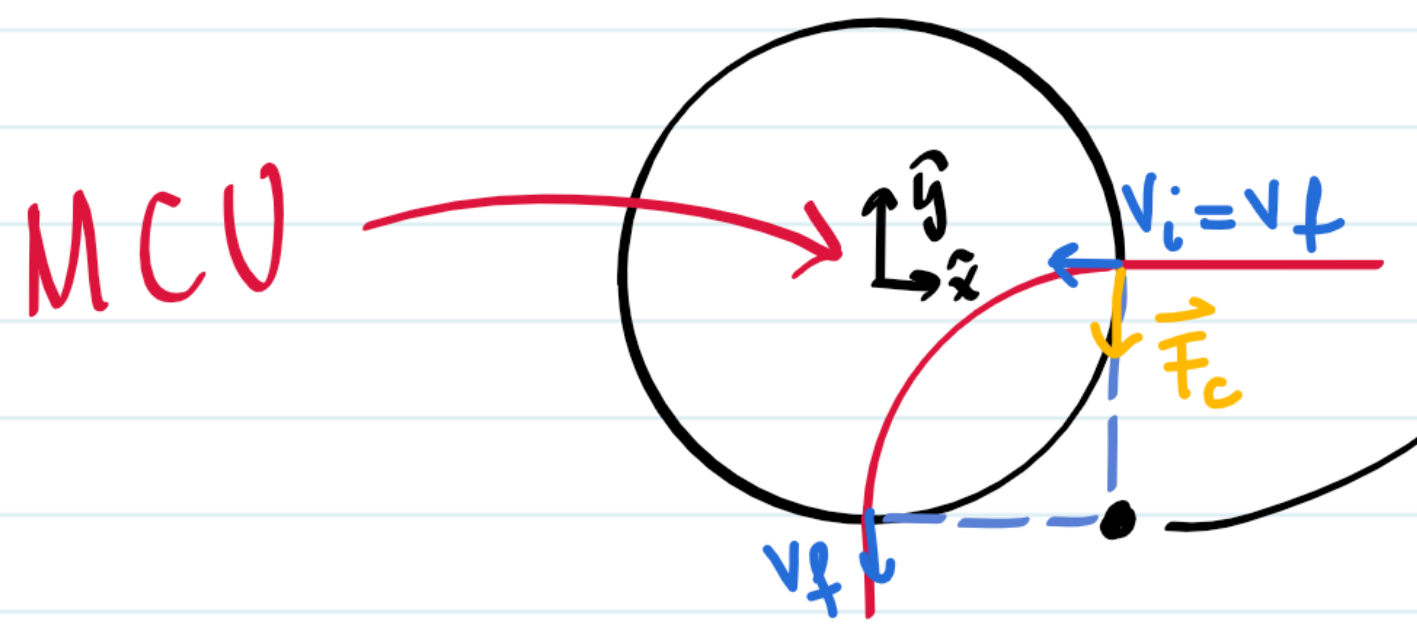
$\Rightarrow$ el mov. de $-q$ dentro del cilindro debe ser circular! pues $\vec{B} = cte$
de radio a

$\Rightarrow \vec{F}_B = cte$

y como el mov. es circular y $\vec{B} = cte$, la partícula mantiene su rapidez dentro del cilindro!

$\Rightarrow v_f = cte = v_i$ al entrar al cilindro.

(+0,3)



el centro del movimiento circular está en $x = a$, $y = -a$

Así, la fuerza que siente dentro del cilindro $\vec{F}_B = -q(\vec{v} \times \vec{B})$ debe ser igual a una fuerza centrípeta $\vec{F}_c = m \cdot \vec{a}_c$ para que el mov. sea circular:

← al entrar al cilindro

$$\rightarrow \vec{F}_B = -q(-v_f\hat{x}) \times (\mu_0 a w \sigma \hat{z}) = -q v_f \mu_0 \sigma a w \cdot \hat{y} \quad \ldots (2)$$

(+0,3)

fuerza al entrar del cilindro

y como $\vec{a}_c = -\frac{v^2}{a}\hat{y}$ (apunta hacia el centro) $\Rightarrow \vec{F}_c = -m\frac{v_f^2}{a}\hat{y} \quad \ldots (3)$

(+0,2)

Finalmente, igualando (2) y (3) tenemos:

$$+ q\mu_0 \sigma a w \cancel{v_f} = + m\frac{v_f^{\cancel{2}}}{a}$$

$$\Rightarrow w = v_f \cdot \left(\frac{m}{q\mu_0\sigma a^2}\right) \underset{(1)}{=} \sqrt{\frac{2q\sigma a}{m\epsilon_0}\ln(2)}\left(\frac{m}{q\mu_0\sigma a^2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{w = \sqrt{\frac{2\ln(2)m}{\epsilon_0 q\sigma a^3}} \cdot \frac{1}{\mu_0}}$$

(+0,2)