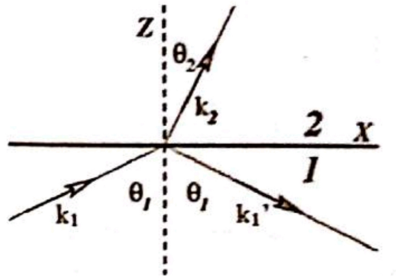
Pauta Aux 14

a) Es posible escribir cada componente de la onda, notando que, dada la geometría existente



$$\vec{k}_1 = k_1 \sin\theta_1 \hat{x} + k_1 \cos\theta_1 \hat{z}$$

$$\vec{k}_1' = k_1' \sin\theta_1 \hat{x} - k_1' \cos\theta_1 \hat{z}$$

$$\vec{k}_2 = k_2 \sin\theta_2 \hat{x} + k_2 \cos\theta_2 \hat{z}$$

Así, los campos eléctricos asociados a las ondas incidente y reflejada se ven por

$$\vec{k}_1 \cdot \vec{r} = k_1 x \sin\theta_1 + k_1 z \cos\theta_1 \Rightarrow \|\vec{E}_I\| = E_1 e^{i(k_1 x \sin\theta_1 + k_1 z \cos\theta_1 - \omega t)}$$

$$\vec{k}_1' \cdot \vec{r} = k_1' x \sin\theta_1 - k_1' z \cos\theta_1 \Rightarrow \|\vec{E}_R\| = E_1' e^{i(k_1' x \sin\theta_1 - k_1' z \cos\theta_1 - \omega t)}$$

$$\vec{k}_2 \cdot \vec{r} = k_2 x \sin\theta_2 + k_2 z \cos\theta_2 \Rightarrow \|\vec{E}_T\| = E_2 e^{i(k_2 x \sin\theta_2 + k_2 z \cos\theta_2 - \omega t)}$$

Para ver la dirección de estos, usamos que $\vec{E} = \frac{\omega}{k} \vec{B}_0 \times \hat{k}$. Como $\vec{B}_0 = B_0 \hat{y}$, la dirección la podemos ver mediante

dirección de $\vec{E}_1$ — dirección de $\vec{B}_1$ — dirección de $\vec{k}_1$

$$\hat{E}_1 = \hat{B}_1 \times \hat{k}_1 = \hat{y} \times (k_1 \sin\theta_1 \hat{x} + k_1 \cos\theta_1 \hat{z}) = k_1 \cos\theta_1 \hat{x} - k_1 \sin\theta_1 \hat{y}$$

$$\hat{E}_1' = -\hat{B}_1' \times \hat{k}_1' = \hat{y} \times (k_1 \sin\theta_1 \hat{x} - k_1 \cos\theta_1 \hat{z}) = k_1 \cos\theta_1 \hat{x} + k_1 \sin\theta_1 \hat{y}$$

$$\hat{E}_2 = \hat{B}_2 \times \hat{k}_2 = \hat{y} \times (k_2 \sin\theta_2 \hat{x} + k_2 \cos\theta_2 \hat{z}) = k_2 \cos\theta_2 \hat{x} - k_2 \sin\theta_2 \hat{y}$$

De manera que, finalmente, el campo eléctrico está dado por

$$\vec{E}_I = E_1 e^{i(k_1 x \sin\theta_1 + k_1 z \cos\theta_1 - \omega t)} \left(k_1 \cos\theta_1 \hat{x} - k_1 \sin\theta_1 \hat{y} \right)$$

$$\vec{E}_R = E_1' e^{i(k_1' x \sin\theta_1 - k_1' z \cos\theta_1 - \omega t)} \left(k_1 \cos\theta_1 \hat{x} + k_1 \sin\theta_1 \hat{y} \right)$$

$$\vec{E}_T = E_2 e^{i(k_2 x \sin\theta_2 + k_2 z \cos\theta_2 - \omega t)} \left(k_2 \cos\theta_2 \hat{x} - k_2 \sin\theta_2 \hat{y} \right)$$

Así, se construye el campo eléctrico total en el medio ① y en el medio ② tal que

$$\vec{E}_{①} = \vec{E}_I + \vec{E}_R \quad ; \quad \vec{E}_{②} = \vec{E}_T$$

En el punto de incidencia (el origen), se cumplen las condiciones de borde

$$\vec{D}_{①}\cdot\hat{n} = \vec{D}_{②}\cdot\hat{n} \Leftrightarrow \varepsilon_1\vec{E}_{①}\cdot\hat{n} = \varepsilon_2\vec{E}_{②}\cdot\hat{n} \quad (1)$$

$$\vec{E}_{①}\times\hat{n} = \vec{E}_{②}\times\hat{n} \quad (2)$$

En este caso, $\hat{n} = \hat{z}$. Además, evaluando $\vec{E}_{①}$ y $\vec{E}_{②}$ en el origen

$$\vec{E}_{①}(\vec{r}=0) = \vec{E}_I(\vec{r}=0) + \vec{E}_R(\vec{r}=0) \quad ; \quad \vec{E}_{②}(\vec{r}=0) = \vec{E}_T(\vec{r}=0) \quad (3)$$

viendo c/u de estos términos

$$\vec{E}_I(\vec{r}=0) = E_1 e^{-i\omega t}(\cos\theta_1\hat{x} - \sin\theta_1\hat{z}) \quad ; \quad \vec{E}_R(\vec{r}=0) = E_1' e^{-i\omega t}(\cos\theta_1\hat{x} + \sin\theta_1\hat{z})$$

$$\vec{E}_T(\vec{r}=0) = E_2 e^{-i\omega t}(\cos\theta_2\hat{x} - \sin\theta_2\hat{z})$$

Sustituyendo lo obtenido en (3)

$$\vec{E}_{①}(\vec{r}=0) = E_1 e^{-i\omega t}(\cos\theta_1\hat{x} - \sin\theta_1\hat{z}) + E_1' e^{-i\omega t}(\cos\theta_1\hat{x} + \sin\theta_1\hat{z})$$

$$\vec{E}_{②}(\vec{r}=0) = E_2 e^{-i\omega t}(\cos\theta_2\hat{x} - \sin\theta_2\hat{z})$$

Así, en las condiciones de borde, junto a $\hat{n} = \hat{z}$

$$\rightarrow \varepsilon_1\left(E_1 e^{-i\omega t}(\cos\theta_1\hat{x} - \sin\theta_1\hat{z}) + E_1' e^{-i\omega t}(\cos\theta_1\hat{x} + \sin\theta_1\hat{z})\right)\cdot\hat{z} = \varepsilon_2 E_2 e^{-i\omega t}(\cos\theta_2\hat{x} - \sin\theta_2\hat{z})\cdot\hat{z}$$

$$\Rightarrow -\varepsilon_1 E_1 \cancel{e^{-i\omega t}}\sin\theta_1 + \varepsilon_1 E_1' \cancel{e^{-i\omega t}}\sin\theta_1 = -\varepsilon_2 E_2 \cancel{e^{-i\omega t}}\sin\theta_2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\varepsilon_1 \sin\theta_1 (E_1 - E_1') = \varepsilon_2 \sin\theta_2 E_2} \quad (*)$$

$$\rightarrow \left(E_1 e^{-i\omega t}(\cos\theta_1\hat{x} - \sin\theta_1\hat{z}) + E_1' e^{-i\omega t}(\cos\theta_1\hat{x} + \sin\theta_1\hat{z})\right)\times\hat{z} = E_2 e^{-i\omega t}(\cos\theta_2\hat{x} - \sin\theta_2\hat{z})\times\hat{z}$$

$$\Rightarrow -E_1 \cancel{e^{-i\omega t}}\cos\theta_1 \cancel{\hat{y}} - E_1' \cancel{e^{-i\omega t}}\cos\theta_1 \cancel{\hat{y}} = -E_2 \cancel{e^{-i\omega t}}\cos\theta_2 \cancel{\hat{y}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{E_1\cos\theta_1 + E_1'\cos\theta_1 = E_2\cos\theta_2} \quad (**)$$

b) Deducir la ley de Snell es sencillo, usando nuevamente las condiciones de borde. En el caso general, dado que la incidencia ocurre en el plano $(z=0)$

$$\Rightarrow \vec{E}_{①}(z=0)\times\hat{n} = \vec{E}_{②}(z=0)\times\hat{n}$$

$$\Rightarrow \left[\vec{E}_I(z=0) + \vec{E}_R(z=0)\right]\times\hat{n} = \vec{E}_T(z=0)\times\hat{n}$$

$$\Rightarrow E_I^{\perp}(z=0) + E_R^{\perp}(z=0) = E_T^{\perp}(z=0)$$

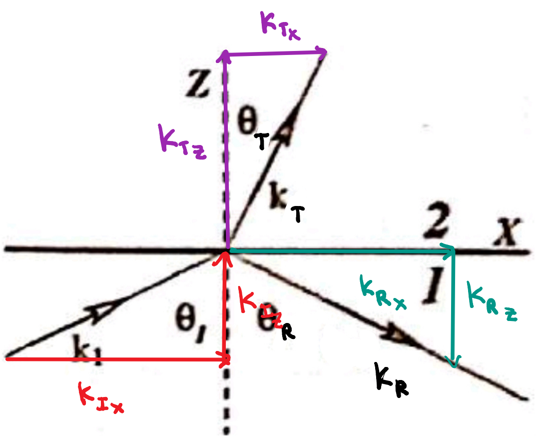
$$\Leftrightarrow E_I e^{i(\vec{k}_I\cdot\vec{r}-\omega t)} + E_R e^{i(\vec{k}_R\cdot\vec{r}-\omega t)} = E_T e^{i(\vec{k}_T\cdot\vec{r}-\omega t)}$$

Notar que E_I, E_R y E_T son únicamente las amplitudes de las ondas. La dependencia espacial y temporal está en el exponente. Como la igualdad se debe sostener en todo punto de la interfaz, para que se cumpla la igualdad obtenida, debe darse que

$$\vec{k}_I\cdot\vec{r} = \vec{k}_R\cdot\vec{r} = \vec{k}_T\cdot\vec{r} \quad / z=0$$

$$\Leftrightarrow k_{I_x}x + k_{I_y}y = k_{R_x}x + k_{R_y}y = k_{T_x}x + k_{T_y}y$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k_{Ix} = k_{Rx} = k_{Tx} \\ k_{Iy} = k_{Ry} = k_{Ty} \end{cases} \qquad (4)$$



Los vectores $\vec{k}$ viven en el plano xz, de manera que $k_{I_y} = k_{R_y} = k_{T_y} = 0$. Así, según la geometría

$$\Rightarrow \begin{cases} k_{I_x} = k_I \,\text{sen}\,\theta_I \;;\; k_{I_z} = k_I \cos\theta_I \\ k_{R_x} = k_R \,\text{sen}\,\theta_R \;;\; k_{R_z} = k_R \cos\theta_R \\ k_{T_x} = k_T \,\text{sen}\,\theta_T \;;\; k_{T_z} = k_T \cos\theta_T \end{cases}$$

Juntándolo con (4)

$$\Rightarrow k_I \,\text{sen}\,\theta_I = k_R \,\text{sen}\,\theta_R = k_T \,\text{sen}\,\theta_T \quad / v = \frac{\omega}{k} \Rightarrow k = \frac{\omega}{v}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cancel{\omega}}{v_I}\,\text{sen}\,\theta_I = \frac{\cancel{\omega}}{v_R}\,\text{sen}\,\theta_R = \frac{\cancel{\omega}}{v_T}\,\text{sen}\,\theta_T \quad / v = \frac{c}{n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n_I}{\cancel{c}}\,\text{sen}\,\theta_I = \frac{n_R}{\cancel{c}}\,\text{sen}\,\theta_R = \frac{n_T}{\cancel{c}}\,\text{sen}\,\theta_T$$

Como $n_I = n_R$ (las ondas incidente y reflejada viven en el mismo medio)

$$\Rightarrow \underbrace{n_I \operatorname{sen}\theta_I = n_I \operatorname{sen}\theta_R}\ \underbrace{= n_T \operatorname{sen}\theta_T}$$

$\Rightarrow \operatorname{sen}\theta_I = \operatorname{sen}\theta_R$

$$\boxed{\Rightarrow \theta_I = \theta_R}$$

Ley de reflexión

$$\boxed{n_I \operatorname{sen}\theta_I = n_T \operatorname{sen}\theta_T}$$

Ley de Snell

Viendo el resultado de (*)

$$\Rightarrow \varepsilon_1 \operatorname{sen}\theta_1 (E_1 - E_1') = \varepsilon_2 \operatorname{sen}\theta_2 E_2$$

$$\Leftrightarrow E_1 - E_1' = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \frac{\operatorname{sen}\theta_2}{\operatorname{sen}\theta_1} E_2$$

Por un lado, gracias a la Ley de Snell,

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_2}{\operatorname{sen}\theta_1} = \frac{n_1}{n_2}$$

por otro,

los dos medios tienen el mismo μ

$$n = \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{\mu_0\varepsilon_0}} \Rightarrow n_1^2 = \frac{\mu\varepsilon_1}{\mu_0\varepsilon_0}, \quad n_2^2 = \frac{\mu\varepsilon_2}{\mu_0\varepsilon_0} \Rightarrow \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{n_2^2}{n_1^2}$$

Sustituyendo

$$E_1 + E_1' = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \frac{\operatorname{sen}\theta_2}{\operatorname{sen}\theta_1} E_2 = \frac{n_2^{\cancel{2}}}{n_1^{\cancel{2}}} \cdot \frac{\cancel{n_1}}{\cancel{n_2}} E_2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{E_1 - E_1' = E_2 \frac{n_2}{n_1}} \qquad (\ast\ast\ast)$$

c) Si $\theta_1 = 0 \Rightarrow \theta_2 = 0$, por ley de Snell. Así, $\cos\theta_1 = \cos\theta_2 = 1$, tal que (**) se reduce a

$$E_1 + E_1' = E_2 \qquad (\ast\ast\ast\ast)$$

Luego, haciendo $(**)$ + $(***)$

$$2E_1 = E_2 + E_2 \frac{n_2}{n_1} \Leftrightarrow 2E_1 = E_2\left(\frac{n_2+n_1}{n_1}\right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{E_2 = 2E_1 \frac{n_1}{n_1+n_2}}$$

Después, $(***)$ - $(**)$

$$2E_1' = E_2 - E_2 \frac{n_2}{n_1} = E_2 \frac{n_1-n_2}{n_1} \quad / \quad E_2 = 2E_1 \frac{n_1}{n_1+n_2}$$

$$= 2E_1 \frac{\cancel{n_1}}{n_1+n_2} \cdot \frac{n_1-n_2}{\cancel{n_1}}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_1' = E_1 \frac{n_1-n_2}{n_1+n_2}}$$

Luego, las fracciones de energía transmitida (T) y reflejada (R) se obtienen por los cocientes entre las intensidades

$$\Rightarrow I_I = \frac{\varepsilon v E_1^2}{2} \quad / \quad v = \frac{c}{n} \Leftrightarrow n = \frac{c}{v} = c\sqrt{\mu\varepsilon} \Leftrightarrow \varepsilon = \frac{n^2}{c^2\mu}, \text{ con } \varepsilon=\varepsilon_1,\ n=n_1,\ \mu=\mu_1$$

$$= \frac{n_1^{\cancel{2}}}{c^{\cancel{2}}\mu_1} \cdot \frac{\cancel{c}}{\cancel{n_1}} \cdot \frac{E_1^2}{2} = \frac{E_1^2 n_1}{2c\mu_1}$$

$$\Rightarrow I_R = \frac{\varepsilon v E_1'^2}{2} \quad / \text{ procedimiento análogo, con } \varepsilon=\varepsilon_1,\ n=n_1,\ \mu=\mu_1$$

$$= \frac{n_1^{\cancel{2}}}{c^{\cancel{2}}\mu_1} \cdot \frac{\cancel{c}}{\cancel{n_1}} \cdot \frac{E_1'^2}{2} = \frac{E_1'^2 n_1}{2c\mu_1}$$

$$\Rightarrow I_T = \frac{\varepsilon v E_2^2}{2} \quad / \text{ procedimiento análogo, con } \varepsilon=\varepsilon_2,\ n=n_2,\ \mu=\mu_2$$

$$= \frac{n_2^{\cancel{2}}}{c^{\cancel{2}}\mu_2} \cdot \frac{\cancel{c}}{\cancel{n_2}} \cdot \frac{E_2^2}{2} = \frac{E_2^2 n_2}{2c\mu_2}$$

Luego, como calculando los coeficientes de transmisión y reflexión

$$T = \frac{I_T}{I_I} = \frac{\frac{E_2^2 n_2}{\cancel{2c\mu_2}}}{\frac{E_1^2 n_1}{\cancel{2c\mu_1}}} = \frac{E_2^2}{E_1^2}\frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{\cancel{E_1^2}}\left(2\cancel{E_1}\frac{n_1}{n_1+n_2}\right)^2 \frac{n_2}{n_1} \Leftrightarrow \boxed{T = \frac{4n_1n_2}{(n_1+n_2)^2}}$$

$\mu_1 = \mu_2$

$$R = \frac{I_R}{I_I} = \frac{\dfrac{E_1'^2 n_1}{2c\cancel{\mu_1}}}{\dfrac{E_1^2 n_1}{2c\cancel{\mu_1}}} = \frac{E_1'^2}{E_1^2} = \frac{1}{\cancel{E_1^2}}\left(\cancel{E_1}\,\frac{n_1-n_2}{n_1+n_2}\right)^2 \iff \boxed{R = \left(\frac{n_1-n_2}{n_1+n_2}\right)^2}$$

$\mu_1 = \mu_2$

Evaluando numéricamente, $n_1 = 1$ y $n_2 = 1{,}5$

$$\Rightarrow T = 0{,}96 \quad ; \quad R = 0{,}04$$

Notar que $R+T = 1$, como es de esperarse.