Pauta tutoría módulo 2

a) El problema de optimización es el siguiente:

F.O. $\max_{x_1, x_2} U(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} \cdot x_2^{1-\alpha}$

restricción $p_1 \cdot x_1 + p_2 x_2 \leq w$

Para resolver se pueden usar 3 métodos.

1) TMS = TMT + restricción con igualdad

$$TMS = \frac{\partial U}{\partial x_1} \Big/ \frac{\partial U}{\partial x_2} = \frac{\alpha \cdot x_1^{\alpha-1} \cdot x_2^{1-\alpha}}{(1-\alpha) \cdot x_1^{\alpha} \cdot x_2^{-\alpha}} = \frac{\alpha}{(1-\alpha)} \cdot \frac{x_2}{x_1}$$

$$TMT = \frac{p_1}{p_2}$$

$\Rightarrow$ óptimo: $\frac{\alpha}{(1-\alpha)} \cdot \frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2}$

$$p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 = w$$

Despejando: $x_1 = \frac{w - p_2 \cdot x_2}{p_1}$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{(1-\alpha)} \cdot \frac{x_2 \cdot \cancel{p_1}}{(w - p_2 \cdot x_2)} = \frac{\cancel{p_1}}{p_2}$$

$$\Leftrightarrow \alpha \cdot \cancel{x_2} \cdot p_2 = (1-\alpha) \cdot w - p_2 \cdot x_2 + \cancel{\alpha \cdot x_2} \cdot p_2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x_2^* = \frac{(1-\alpha) \cdot w}{p_2}} \Rightarrow \boxed{x_1^* = \frac{\alpha \cdot w}{p_1}}$$

2) Con Lagrangeano: $L(x_1, x_2, \lambda) = x_1^{\alpha} \cdot x_2^{1-\alpha} - \lambda(p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 - w)$

CPO: $\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \Leftrightarrow \alpha \cdot x_1^{\alpha-1} \cdot x_2^{1-\alpha} - \lambda \cdot p_1 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{\alpha \cdot x_1^{\alpha-1} \cdot x_2^{1-\alpha}}{p_1}$ (1)

$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \Leftrightarrow (1-\alpha) \cdot x_1^{\alpha} \cdot x_2^{-\alpha} - \lambda \cdot p_2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{(1-\alpha) \cdot x_1^{\alpha} \cdot x_2^{-\alpha}}{p_2}$ (2)

$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 - w = 0$ (3)

Igualando (1) y (2) se tiene lo mismo que de TMS = TMT

$$\frac{\alpha}{(1-\alpha)} \cdot \frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2}$$

y (3) corresponde a la restricción presupuestaria con igualdad por lo que llegaremos a los mismos x_1^* y x_2^* de antes.

3) Sin Lagrangeano

Asumimos la igualdad de la restricción pues no tiene sentido usar menos dinero del que tenemos si queremos maximizar

Luego se reduce la dimensión del problema "metiendo" la restricción en la F.O. $\quad x_1 = \frac{w - p_2 \cdot x_2}{p_1}$

$\Rightarrow$ El problema inicial es equivalente a:

$$\max_{x_2} \left(\frac{w - p_2 \cdot x_2}{p_1}\right)^{\alpha} \cdot x_2^{1-\alpha}$$

· Calculamos la CPO:

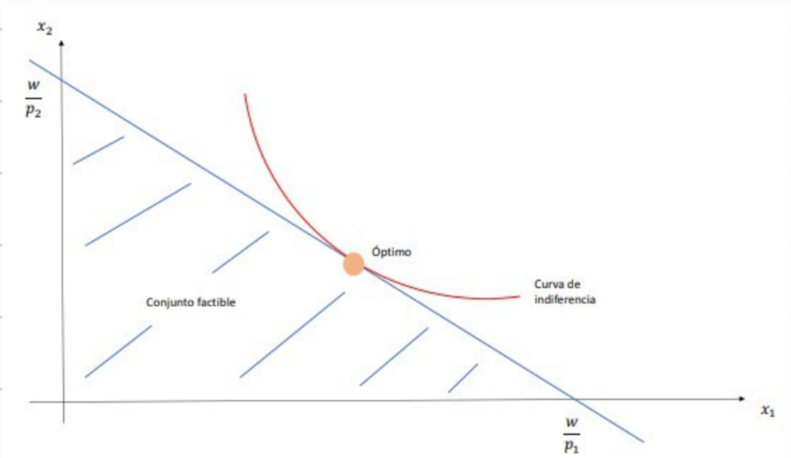
$$-\alpha \cdot \left(\frac{w - p_2 \cdot x_2}{p_1}\right)^{\alpha-1} \cdot \frac{p_2}{p_1} \cdot x_2^{1-\alpha} + \left(\frac{w - p_2 \cdot x_2}{p_1}\right)^{\alpha} \cdot (1-\alpha) \cdot x_2^{-\alpha} = 0$$

$$\frac{(1-\alpha)}{\alpha} \cdot \left(\frac{w - p_2 \cdot x_2}{\cancel{p_1}}\right) = x_2 \cdot \frac{p_2}{\cancel{p_1}} \iff x_2^* = \frac{w(1-\alpha)}{p_2}$$

$$\Rightarrow x_1^* = \frac{w \cdot \alpha}{p_1}$$

Y llegamos a los mismos x_1^* y x_2^* de antes.

b)



c) Elasticidad precio de la demanda ingredientes:

x_1 | $e(x_1^*, p_1) = \frac{\partial x_1^*}{\partial p_1} \cdot \boxed{\frac{p_1}{x_1^*}}$ → Esto es simple pues sabemos la relación entre p_1 y x_1^* $\quad x_1^* = \frac{\alpha \cdot w}{p_1}$

$$e(x_1^*, p_1) = -\frac{\alpha \cdot w}{p_1^2} \cdot \frac{p_1}{\alpha \cdot w} \cdot p_1$$

$$\boxed{e(x_1^*, p_1) = -1}$$

x_2 | $e(x_2^*, p_2) = \frac{\partial x_2^*}{\partial p_2} \cdot \frac{p_2}{x_2^*} = \frac{-(1-\alpha) \cdot w}{p_2^2} \cdot \frac{p_2^2}{(1-\alpha) \cdot w}$

$$\boxed{e(x_2^*, p_2) = -1}$$

w | $e(x_1^*, w) = \frac{\partial x_1^*}{\partial w} \cdot \frac{w}{x_1^*} = \frac{\alpha}{p_1} \cdot w \cdot \frac{p_1}{\alpha \cdot w}$

$$\boxed{e(x_1^*, w) = 1}$$

$$e(x_2^*, w) = \frac{\partial x_2^*}{\partial w} \cdot \frac{w}{x_2^*} = \frac{(1-\alpha)}{p_2} \cdot w \cdot \frac{p_2}{(1-\alpha) \cdot w}$$

$$\boxed{e(x_2^*, w) = 1}$$

d) Interprete

- La elasticidad de x_1^* es -1, es decir, la demanda cambia proporcional al precio pero de manera inversa. Por ejemplo un cambio de un 5% en p_1 provoca un cambio de un 5% en la demanda x_1^*. Lo mismo para x_2^* y p_2
- La elasticidad de x_1^* y x_2^* con respecto al ingreso w es 1 por tanto el cambio es proporcional, es decir, un cambio de 1% en el ingreso cambia la demanda en un 1%.

e) Extra: ¿Cómo se interpreta la TMS en este problema?

En la parte a) obtuvimos la $TMS = \frac{\alpha}{(1-\alpha)} \cdot \frac{x_2}{x_1}$ que representa el trade-off entre x_1 y x_2. Podemos sacar conclusiones al calcular el límite:

$$\lim_{x_1 \to 0} TMS = \lim_{x_1 \to 0} \frac{\alpha}{(1-\alpha)} \cdot \frac{x_2}{x_1} = \infty$$

$$\lim_{x_1 \to \infty} TMS = \lim_{x_1 \to \infty} \frac{\alpha}{(1-\alpha)} \cdot \frac{x_2}{x_1} = 0$$

Esto es que cuando el ingrediente x_1 es escaso $(x_1 \to 0)$ estoy dispuesto a transar mucho del ingrediente x_2 por 1 unidad de x_1 ya que en este caso, los ingredientes se complementan y no me sirve tener mucho de uno y muy poco del otro (la Cangreburguer tiene que tener proporciones perfectas!!!)

Asimismo cuando x_1 es abundante $(x_1 \to \infty)$ estoy dispuesto a transar muy poco de x_2 por 1 unidad extra de x_1 ya que tengo demasiado.

Definición:

Bienes complementarios: son aquellos bienes que requieren de otros bienes para su uso. Ej: zapato derecho e izquierdo, automóvil y combustible, etc.

Bienes Sustitutos: bienes que pueden ser reemplazados por otros bienes, por tanto, un aumento del precio de uno provoca una disminución de su demanda pero un aumento de demanda del bien sustituto. Ej: mantequilla y margarina, Netflix y DisneyPlus, etc.