P1 $(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$ / Notación $(\ )^2$

$= a(a+b) + b(a+b)$ / Ax Dist sobre $(a+b)\cdot K = aK + bK$

$= a^2 + ab + ba + b^2$ / Ax Dist sobre $K(a+b) = Ka + Kb$

Notación $(\ )^2$

$= a^2 + ab + ab + b^2$ / Ax Asociatividad suma y Ax Conmutatividad Mult

$ab = ba$

$= a^2 + 2ab + b^2$ / Notación $2x = x + x$

P2 a) Unicidad elemento neutro multiplicativo

Supongamos que existen 2, e_1, e_2, / $\forall x \in \mathbb{R}$ $x \cdot e_1 = x$ (1)

$x \cdot e_2 = x$ (2)

En particular $e_2 \in \mathbb{R} \overset{(1)}{\Rightarrow} e_2 \cdot e_1 = e_2$ (3)

$e_1 \in \mathbb{R} \overset{(2)}{\Rightarrow} e_1 \cdot e_2 = e_1$ (4)

Usando (4)

$e_1 = e_1 \cdot e_2$

$= e_2 \cdot e_1$ / Ax Conmutatividad del Producto

$= e_2$ / (3)

$\Rightarrow \boxed{e_1 = e_2}$, por lo tanto el neutro es único

b) $-(ab) = a(-b)$

$-(ab)$ es el inverso aditivo de ab, por lo tanto es el único que $ab + z = 0$

$$ab + a(-b) = a(b+(-b)) \quad / \text{Ax Distributividad}$$
$$= a \cdot 0 \quad / -b \text{ es inv aditivo de } b$$
$$= 0 \quad / \text{Prop} \star$$

$\Rightarrow a(-b) = -(ab)$ ya que es el inverso aditivo de ab

---

<u>Prop ☆</u>

$$a \cdot 0 = a \cdot 0 + 0 \quad / 0 \text{ es neutro aditivo}$$
$$= a \cdot 0 + (a + (-a)) \quad / -a \text{ es inverso aditivo de } a$$
$$= a \cdot 0 + (a \cdot 1 + (-a)) \quad / a \cdot 1 = a, \text{ pues } 1 \text{ es neutro multiplicativo}$$
$$= (a \cdot 0 + a \cdot 1) + (-a) \quad / \text{Ax Asociativi de la suma}$$
$$= a \cdot (0+1) + (-a) \quad / \text{Ax Distributividad}$$
$$= a \cdot 1 + (-a) \quad / 0 \text{ Neutro Aditivo}$$
$$= a + (-a) \quad / 1 \text{ Neutro Mult}$$
$$= 0 \quad / -a \text{ inv Aditivo de } a$$

c) $(-a)^{-1} = -(a^{-1})$

Pdq: $(-a)(-a^{-1}) = 1$, pues $(-a)^{-1}$ es el inverso multiplicativo de $(-a)$ y es único

$(-a)(-a^{-1}) = -((-a)a^{-1})$ / Usando b)

$= -(a^{-1}(-a))$ / Ax Conmutatividad producto

$= -(-(a^{-1} \cdot a))$ / Usando b)

$= -(-(1))$ / Usando que a^{-1} inverso multiplicativo de a

$= 1$ / prop ☺

$\Rightarrow (-a^{-1}) = (-a)^{-1}$ por unicidad

Prop ☺ $-(-(1)) = 1$

$-(-(1)) = -(-1)$ por notación $\Big\} \Leftrightarrow -(-1) = 1$

En palabras 1 es el inverso ~~mult~~ Aditivo de (-1)

$(-1) + 1 = 1 + (-1)$ / Ax Conmutatividad

$= 0$ / (-1) inv Aditivo de 1

$\Rightarrow 1 = -(-1)$ pues el inv Aditivo es único

$\Rightarrow \boxed{1 = -(-(1))}$ por notación

$i)$ $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ / $\underline{Pdq}$ $a^{-1}b^{-1}$ es el inverso multiplicativo de ab

$$
\begin{aligned}
ab\cdot(a^{-1}b^{-1}) &= ab(b^{-1}a^{-1}) && \text{/ Ax Conmutatividad producto} \\
&= a(bb^{-1})a^{-1} && \text{/ Ax Asociatividad Mult} \\
&= a\cdot(1)\cdot a^{-1} && \text{/ } \cancel{Ax}\ b^{-1} \text{ inverso multiplicativo } b \\
&= (a\cdot 1)\cdot a^{-1} && \text{/ Ax Asociatividad producto} \\
&= a\cdot a^{-1} && \text{/ 1 neutro multiplicativo} \\
&= 1 && \text{/ } a^{-1} \text{ inv multiplicativo } a
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow (a^{-1}b^{-1}) = (ab)^{-1}$ Unicidad inverso multiplicativo

$\boxed{P3}$ $i)$ $a,b\in\mathbb{R}-\{0\}$ / $(a+b)=1 \Rightarrow (ab)^{-1} = a^{-1}+b^{-1}$

$\underline{Pdq}$ $(ab)(a^{-1}+b^{-1}) = \underline{1}$

$$
\begin{aligned}
(ab)(a^{-1}+b^{-1}) &= aba^{-1} + abb^{-1} && \text{/ Ax Dist.} \\
&= (ab)a^{-1} + a(bb^{-1}) && \text{/ Ax Asoc mult} \\
&= (ba)a^{-1} + a(bb^{-1}) && \text{/ Ax Comm mult} \\
&= b(aa^{-1}) + a(bb^{-1}) && \text{/ Ax Asoc mult} \\
&= b\cdot(1) + a\cdot(1) && \text{/ } a^{-1} \text{ inv mult } a,\ b^{-1} \text{ inv mult } b \\
&= (b\cdot 1) + (a\cdot 1) && \text{/ Ax Asoc mult} \\
&= b + a && \text{/ } \cancel{A} \text{ Neutro mult}
\end{aligned}
$$

$= a + b$ / Ax Conmu Sum

$= 1$ / Hipotesis

$\Rightarrow (a^{-1} + b^{-1}) = (ab)^{-1}$ por unicidad del reciproco

ii) $(ab^{-1} + c^{-1})[(bc)(ac+b)^{-1}] = [(ab^{-1} + c^{-1})(bc)](ac+b)^{-1}$ / Ax Asoc mult

$= [ab^{-1}(bc) + c^{-1}(bc)](ac+b)^{-1}$ / Ax Dist

$= [a(b^{-1}b)c + (c^{-1}b)\cdot c](ac+b)^{-1}$ / Ax Asoc Mult

$= [a(bb^{-1})\cdot c + c\cdot(c^{-1}b)](ac+b)^{-1}$ / Ax Conm mult

$= [a(bb^{-1})\cdot c + (c\cdot c^{-1})b](ac+b)^{-1}$ / Ax Asoc mult

$= [a\cdot(1)\cdot c + (1)\cdot b](ac+b)^{-1}$ / b^{-1} inv mult b, c^{-1} inv mult c

$= [(a\cdot 1)\cdot c + (1\cdot b)](ac+b)^{-1}$ / Ax Asoc mult

$= [a\cdot c + b][ac+b]^{-1}$ / 1 Neutro mult

$= 1$ / $[a\cdot c+b]^{-1}$ inverso mult de $[ac+b]$

P4 (Ax 1) $2 \in C$, (Ax 3) $x, y \in C \Rightarrow x+y \in C$

(Ax 2) si $x \in C \Rightarrow 3x+1 \in C$, (Ax 4) $3 \notin C$

a) $9 \in C$

Como $\underset{\text{por (Ax1)}}{2 \in C} \underset{(Ax\,2)}{\Rightarrow} 7 \in C$, como $2 \in C$, $7 \in C \underset{(Ax\,3)}{\Rightarrow} 9 \in C$

b) $1 \notin C$.

Supongamos que $1 \in C$, Como $2 \in C \underset{(Ax\,3)}{\Rightarrow} 1+2=3 \in C$ $\times$ por (Ax 4)

c) Si $x \in C \Rightarrow 2x \in C$

$x \in C$, $x \in C \underset{(Ax\,3)}{\Rightarrow} x+x=2x \in C$

d) Si $x, y \in C \Rightarrow 3x+1+3y \in C$

Notando que $3x+1+3y = 3(x+y)+1$ / Usando Ax de Cuerpo

Como $x, y \in C \underset{(Ax\,3)}{\Rightarrow} x+y \in C$

$x+y \in C \underset{(Ax\,2)}{\Rightarrow} 3(x+y)+1 \in C \Rightarrow 3x+1+3y \in C$

e) Si $x \in C \Rightarrow -x \in C$

Suponiendo que $(-x) \in C$, Como $x \in C$, $-x \in C \overset{(Ax\,3)}{\Rightarrow} 0 \in C$

Como $0 \in C \overset{(Ax\,2)}{\Rightarrow} 3 \cdot 0+1 = 1 \in C$ $\times$ $\Rightarrow -x \notin C$