P1 a) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$ $\quad (x+y+z)(x^{-1}+y^{-1}+z^{-1}) \geq 9$

Al desarrollar $(x+y+z)(x^{-1}+y^{-1}+z^{-1}) = 3 + xy^{-1} + yx^{-1} + yz^{-1} + zy^{-1} + xz^{-1} + zx^{-1}$

Idea: Probar que $\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*$ $\quad ab^{-1} + ba^{-1} \geq 2$

$(a-b)^2 \in \mathbb{R}_+$, $a^2 - 2ab + b^2 \in \mathbb{R}_+$, usando Binomio

$a \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow a^{-1} \in \mathbb{R}_+^*$

Por Ax Clausura mult

$\Rightarrow a^{-1} \cdot (a^2 - 2ab + b^2) \overset{\text{Ax Conmut mult, Notación, inv mult}}{=} a - 2b + b^2 a^{-1} \in \mathbb{R}_+$

$b \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow b^{-1} \in \mathbb{R}_+^*$

Por Ax Clausura mult

$\Rightarrow$

$b^{-1} \cdot (a - 2b + b^2 a^{-1}) \overset{\text{Ax Conmut mult, Notación, inv mult}}{=} ab^{-1} - 2 + ba^{-1} \in \mathbb{R}_+$

$\overset{\text{Ax Conmut}}{=} ab^{-1} + ba^{-1} - 2 \in \mathbb{R}_+$

$\Leftrightarrow \boxed{ab^{-1} + ba^{-1} \geq 2}$

Usando esta propiedad

$$\Rightarrow xy^{-1}+yx^{-1}\geq 2 \iff xy^{-1}+yx^{-1}-2\in\mathbb{R}_+$$

$$\Rightarrow yz^{-1}+zy^{-1}-2\in\mathbb{R}_+$$

$$\Rightarrow zx^{-1}+xz^{-1}-2\in\mathbb{R}_+$$

Clausura +

$$\Rightarrow \underbrace{xy^{-1}+xz^{-1}+yx^{-1}+yz^{-1}+zx^{-1}+zy^{-1}-6}_{K}\in\mathbb{R}_+$$

$$K\overset{\text{Neutro Aditivo}}{=}K+0\overset{\text{inv Adit 3}}{=}K+3-3\overset{\text{Neutro}}{=}K+1+1+1-3\overset{\text{inv mult x, y, z}}{=}K+x\cdot x^{-1}+yy^{-1}+zz^{-1}-3$$

$$=xy^{-1}+xz^{-1}+x\cdot x^{-1}+yx^{-1}+yz^{-1}+yy^{-1}+zx^{-1}+zy^{-1}+zz^{-1}-9$$

Ax Dist, Ax Asoc, Ax Conmutatividad

$$(x+y+z)(x^{-1}+y^{-1}+z^{-1})-9$$

Como $K\in\mathbb{R}_+$

$$\Rightarrow (x+y+z)(x^{-1}+y^{-1}+z^{-1})-9\in\mathbb{R}_+$$

$$\Rightarrow \boxed{(x+y+z)(x^{-1}+y^{-1}+z^{-1})\geq 9}$$

b) $a^4 + b^4 > a^3 b + b^3 a$

$\Leftrightarrow a^4 - a^3 b + b^4 - b^3 a \in \mathbb{R}_+^*$

$\Leftrightarrow a^3(a-b) + (-b^3)(a-b) \in \mathbb{R}_+$ / Ax Distributividad

$\Leftrightarrow (a^3 - b^3)(a-b) \in \mathbb{R}_+$ / Ax Dist

$\Leftrightarrow (a-b)(a^2+ab+b^2)(a-b) \in \mathbb{R}_+$ / Diferencia de cubos

$\Leftrightarrow (a-b)^2(a^2+ab+b^2) \in \mathbb{R}_+$ /Notación

(I)

$(a-b)^2 \in \mathbb{R}_+^*$, pues es un $()^2$

$a^2 \in \mathbb{R}_+$, $b^2 \in \mathbb{R}_+$ (también lo son)

$ab \in \mathbb{R}_+$ / por clausura mult

$a \neq b) \Rightarrow (a-b)^2 \in \mathbb{R}_+^*$

Como $a \neq b \Rightarrow$ Si $a = 0 \Rightarrow b \neq 0$
Si $b = 0 \Rightarrow a \neq 0$ $\Big\}$ $a^2 + b^2 \in \mathbb{R}_+^*$ Clausura y $a^2 \in \mathbb{R}_+^*$ ó $b^2 \in \mathbb{R}_+^*$

$\Rightarrow a^2 + ab + b^2 \in \mathbb{R}_+^*$

Clausura mult

$\Rightarrow (a-b)^2(a^2+ab+b^2) \in \mathbb{R}_+^* \overset{(I)}{\Longrightarrow} \boxed{a^4+b^4 > a^3b+b^3a}$

P2

a) $\dfrac{x^2-2x+2}{x^2-3x+2} - 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow$ $\dfrac{x}{(x-2)(x-1)} \geq 0$ $\xrightarrow{}$ Puntos Críticos $x = \{0, 1, 2\}$

Puede ser igual a cero (0) — Indeterminan (1, 2)

	$-\infty$	0	1	2	∞
x	$-$	$+$	$+$	$+$	
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$+$	
$x-1$	$-$	$-$	$+$	$+$	
$\frac{x}{(x-2)(x-1)}$	$-$	$+$	$-$	$+$	

$\Longrightarrow \boxed{Sol = [0,1) \cup (2, \infty)}$

b) $\dfrac{22}{2x-3} + \dfrac{28x+26}{4x^2-9} > \dfrac{51}{2x+3}$

$\Leftrightarrow$ $\dfrac{35(7-x)}{(2x-3)(2x+3)} > 0$ Puntos Críticos $x = \{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 7\}$ es estricta, indeterm.

	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	7	∞
$7-x$	$+$	$+$	$+$	$-$	
$2x-3$	$-$	$-$	$+$	$+$	
$2x+3$	$-$	$+$	$+$	$+$	
multiplicación	$+$	$-$	$+$	$-$	

$\boxed{Sol = (-\infty, -\frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}, 7)}$

P3 a) $||2x-3|-4| \leq 2$, usando para $a \in \mathbb{R}_+$ $|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$

$\iff -2 \leq |2x-3|-4 \leq 2$

$\iff 2 \leq |2x-3| \leq 6$

$\iff [2 \leq |2x-3|] \wedge [|2x-3| \leq 6]$ / usando $|x| \geq a$ $\forall a \in \mathbb{R}_+$ $x \geq a \vee x \leq -a$

$\iff [(2 \leq 2x-3) \vee (2x-3 \leq -2)] \wedge [-6 \leq 2x-3 \leq 6]$

$\iff [(\frac{5}{2} \leq x) \vee (x \leq \frac{1}{2})] \wedge [-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{9}{2}]$

$\iff [[\frac{5}{2}, \infty) \cup (-\infty, \frac{1}{2}]] \cap [-\frac{3}{2}, \frac{9}{2}]$

$\iff \boxed{[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}] \cup [\frac{5}{2}, \frac{9}{2}] = Sol}$

Obs: Este es un método, el de b) es otro

Se pueden mezclar

b) $3|x+5|-10 < 2|x-2|$

1) buscar donde los valores absolutos se anulan

$\boxed{x = -5, 2}$ Ahora separar en casos

Caso 1 $(-\infty, -5]$, Caso 2 $(-5, 2]$, Caso 3 $(2, \infty)$

*dos: No hay un motivo para escoger si los bordes están en uno o otro conjunto

Por ejemplo: Caso 1 $(-\infty,-5)$, Caso 2 $[-5,2]$, Caso 3 $(2,\infty)$

También sirve, solo escoger en el que prefieran

Caso 1 $\quad x \leq -5 \Rightarrow x+5 \leq 0 \Rightarrow |x+5| = -(x+5)$

$\Rightarrow x-2 \leq 0 \Rightarrow |x-2| = -(x-2)$

Reescribiendo

$$-3(x+5)-10 < -2(x-2)$$

$$\Rightarrow -29 < x \Rightarrow (-\infty,-29)$$

Como $x \in$ Caso 1 $\Rightarrow$ Sol caso 1 $= (-\infty,-29) \cap (-\infty,-5]$

$= \boxed{(-\infty,-5]}$

Caso 2 $\quad x \in [-5,2] \Rightarrow x+5 \geq 0 \Rightarrow |x+5| = x+5$

$\Rightarrow x-2 \leq 0 \Rightarrow |x-2| = -(x-2)$

Reescribiendo

$$3(x+5)-10 < -2(x-2)$$

$$\Rightarrow 5x < -1 \Rightarrow x < -\frac{1}{5}$$

Como $x \in$ Caso 2 $\Rightarrow \boxed{\text{Sol caso } 2 = \left(-5,-\frac{1}{5}\right)}$

Caso 3

$x > 2 \Rightarrow x-2>0 \Rightarrow |x-2| = x-2$

$x+5>0 \Rightarrow |x+5| = x+5$

Reescribiendo $\Rightarrow$

$$3(x+5) - 10 < 2(x-2)$$

$$\Rightarrow x < -9.$$

Como $x \in$ Caso 3 $\Rightarrow \boxed{Sol_{\text{Caso } 3} = \phi}$

$$\Rightarrow Sol_{\text{Total}} = Sol_{\text{Caso } 1} \cup Sol_{\text{Caso } 2} \cup Sol_{\text{Caso } 3}$$

$$\boxed{Sol_{\text{Total}} = \left(-\infty, -\frac{1}{5}\right)}$$

P4

$$\frac{||x| - |x-2||}{x^2-1} \leq 2$$

, Nota que $x \neq -1$ o 1

Si $x^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 1)$

$||x| - |x-2|| \geq 0$ Siempre, Si $x \in (-1,1)$

$$\Rightarrow \frac{||x|-|x-2||}{x^2-1} < 0 \Rightarrow \text{es} \leq 2$$

$\Rightarrow (-1, 1)$ soluciona el problema

Falta estudiar $(-\infty,-1)$ y $(1,\infty)$

Caso $(-\infty,-1)$

$$\Rightarrow \frac{\big||x|-|x-2|\big|}{x^2-1} \le 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{|-x+(x-2)|}{x^2-1} \le 2$$, pues $x<0 \Rightarrow |x|=-x$
$x-2<0 \Rightarrow |x-2|=-(x-2)$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{x^2-1} \le 2 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2-1} \le 1 \Leftrightarrow \frac{1-x^2+1}{x^2-1} \le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2-x^2}{x^2-1} \le 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-2}{x^2-1} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{x^2-1} \ge 0$$

Dos opciones — hacer tablita con los 4

— Notar que $x^2-1>0$, pues $x<-1$
$\Leftrightarrow x^2>1$

$$\Leftrightarrow (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) \ge 0$$

	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	-1	$\sqrt{2}$	∞
$x-\sqrt{2}$	$-$	$-$			
$x+\sqrt{2}$	$-$	$+$			
(x)	$+$	$-$			

→ No importa en este caso pues $x<-1$

Se puede hacer una tabla más chica es opcional

$$\Rightarrow \boxed{Sol_{caso} = (-\infty,-\sqrt{2})}$$

Caso $x \in (1, \infty)$

$$\Leftrightarrow \frac{|x - |x-2||}{x^2-1} \leq 2$$

Si ve que $x>1>0 \Rightarrow |x| = x$

Como $x^2-1>0$ / pues $x^2>1$

$$\Leftrightarrow |x - |x-2|| \leq 2(x^2-1)$$

Caso I Si $x \in (1,2]$

Caso II Si $x \in (2,\infty)$ / pues $|x-2|$ se hace 0 en $x=2$

$\boxed{\text{Caso I}}$ Si $x \in (1,2] \Rightarrow x-2<0 \Rightarrow |x-2| = -(x-2)$

$$\Leftrightarrow |x + x - 2| \leq 2(x^2-1)$$

$$\Leftrightarrow \cancel{2}|x-1| \leq \cancel{2}(x^2-1)$$

, $x>1 \Rightarrow x-1>0 \Rightarrow |x-1| = x-1$

$$\Leftrightarrow x-1 \leq x^2-1$$

$$\Leftrightarrow x \leq x^2 \underset{x>0}{\Leftrightarrow} \underbrace{1 \leq x}_{x \in [1,\infty)}$$

Como $x \in (1,2]$

$$\Rightarrow Sol_{\text{caso I}} = (1,2]$$

Caso II Si $x \in (2,\infty) \Rightarrow x-2>0 \Rightarrow |x-2| = x-2$

$$\Rightarrow |x - x + 2| \leq 2(x^2-1) \Leftrightarrow |2| \leq 2(x^2-1)$$

$\iff \quad 2 \leq 2x^2 - 2$

$\iff \quad 4 \leq 2x^2$

$\iff \quad 2 \leq x^2$

$\iff \quad x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$

Como $x > 2 \implies \boxed{(2, \infty) = \text{Sol caso II}}$

finalmente Uniendo todos los casos

$$\boxed{\text{Solución} = (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)}$$