MA1001 Introducción al Cálculo

Auxiliares: Vicente Salinas
Dudas: vicentesalinas@ing.uchile.cl

Auxiliar Extra C1

22 de septiembre de 2022

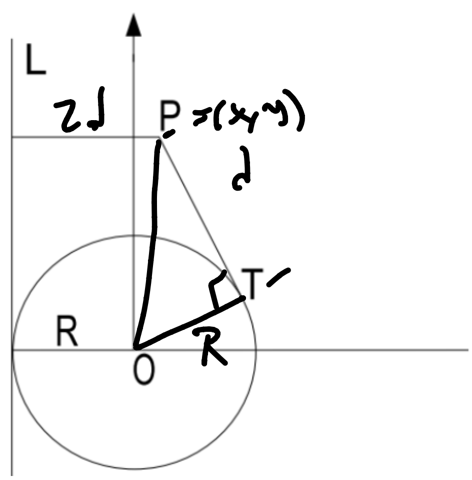
P1. Resuelva la siguiente incecuación:

$$|x-4|+x \leqslant \frac{1}{(x-1)}$$

P2. *a*) Considere los puntos $A=(a,0)$ y $B=(-a,0)$, donde $a>0$. Encuentre el lugar geométrico de los puntos $P=(x,y)$ tal que las pendientes de las rectas L_{PA} y L_{PB} satisfacen la siguiente relación

$$m_{PA}=\frac{2m_{PB}}{1-m_{PB}^2}$$

b) Dada la circunsferencia $C: x^2+y^2=R^2$ y la recta $L: x=-R$, se pide determinar el Lugar Geométrico de los puntos P del plano, tales que la distancia de P a la recta L es igual a 2 veces la magnitud del trazo PT, tangente desde P a la circunferencia C (ver figura)



Identique el Lugar Geométrico resultante, indicando, si corresponde, centro, focos, semiejes, directrices, asíntotas y excentricidad.

INDICACION: Notar que el triángulo POT es rectángulo.

P3. Considere la función definida por:

$$f(x)=\frac{x^2-x}{x+1}$$

Se pide

a) Determinar: Dom(f), ceros, paridad e intersección con el eje OY

b) Determinar los signos de la función, es decir, donde $f(x)$ es positiva y donde es negativa

c) Determinar los intervalos de crecimiento, es decir, en que intervalos la función $f(x)$ es creciente y en cuales es decreciente.

$\boxed{P1}$ $$|x-4| + x \leq \frac{1}{x-1}$$

4 es importante $\Rightarrow (-\infty, 4)$ y $[4, \infty)$

Caso $(-\infty, 4)$

$x - 4 < 0$

$\Rightarrow |x-4| = -(x-4)$

$$\Rightarrow -(x-4) + x \leq \frac{1}{x-1}$$

$$\Rightarrow 4 \leq \frac{1}{x-1}$$

} Pude haber separado en $x < 1$ o $x \geq 1$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{1}{x-1} - \frac{4(x-1)}{x-1}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{5-4x}{x-1}$$

} $x = \frac{5}{4}$

$x = 1$

	$-\infty$	1	$\frac{5}{4}$	4
$5-4x$	$+$	$+$	$-$	
$x-1$	$-$	$+$	$+$	
$\frac{5-4x}{x-1}$	$-$	$+$	$-$	

$\Rightarrow Sol|_{Caso\ 1} \quad (1, \frac{5}{4}]$

Caso $\quad x \in [4, \infty)$

$x-4 \geq 0 \Rightarrow |x-4| = x-4$

$$x-4+x \leq \frac{1}{x-1}$$

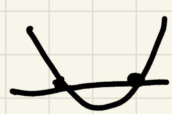
$$\Rightarrow 2x-4 \leq \frac{1}{x-1} \qquad / \text{Como } x-1>0$$

$$\Rightarrow 2(x-2)(x-1) \leq 1$$

$$\Rightarrow 2x^2-6x+4-1 \leq 0$$

$$\Rightarrow 2x^2-6x+3 \leq 0$$

$$\Rightarrow x^2-3x+\frac{3}{2} \leq 0$$



Solo puede ser entre sus raíces

$$\tilde{x} = \frac{3 \pm \sqrt{9-6}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Sol}_{\text{caso } 2} = \underline{\left[\frac{3-\sqrt{3}}{2}, \frac{3+\sqrt{3}}{2}\right]} \cap [4, \infty)$$

$$= \emptyset$$

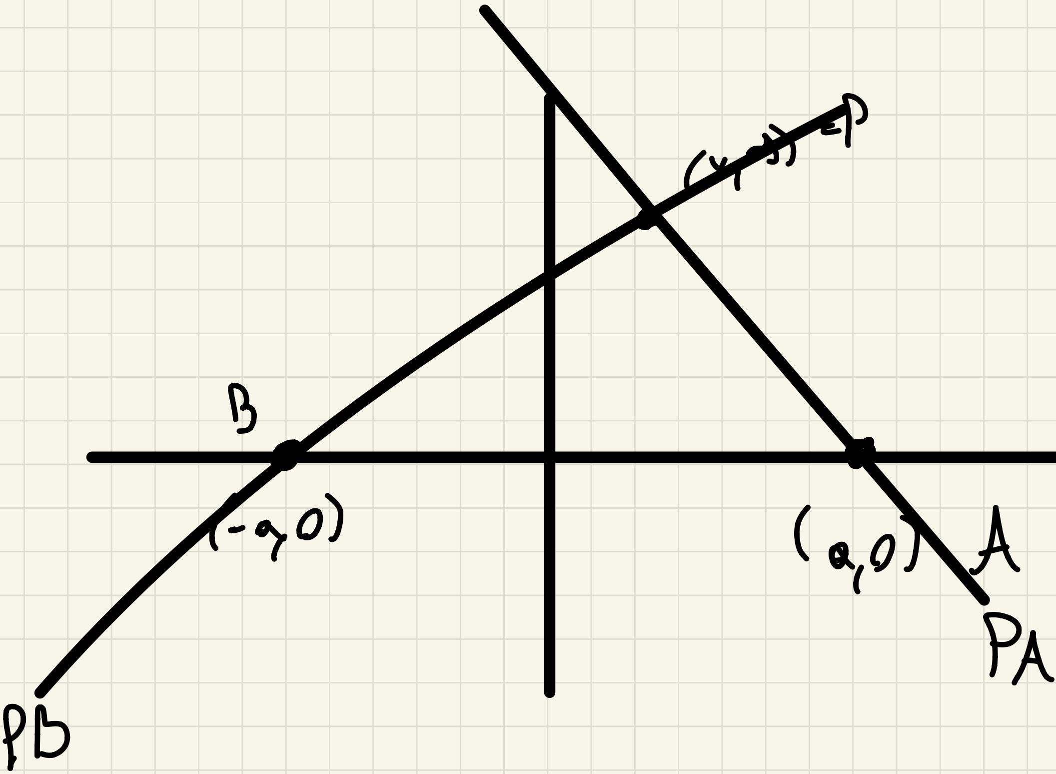
$$\frac{3+\sqrt{3}}{2} < \frac{3+\sqrt{4}}{2} = \frac{5}{2} < 4$$

$$\text{Solución} = \left(1, \frac{5}{4}\right]$$

$\boxed{P2}$

$$m_{PA} = \frac{2m_{PB}}{1 - m_{PB}^2}$$

R^2 y la recta L :



$$m_{PA} = \frac{y-0}{x-a} = \frac{y}{x-a}, \quad m_{PB} = \frac{y-0}{x-(-a)} = \frac{y}{x+a}$$

$$\frac{y}{x-a} = \frac{\frac{2y}{x+a}}{1-\frac{y^2}{(x+a)^2}} = \frac{\frac{2y}{x+a}}{\frac{(x+a)^2-y^2}{(x+a)^2}}$$

$$\frac{y}{x-a} = \frac{(x+a)\,2y}{(x+a)^2-y^2}$$

Podía decir $y=0$ es solución y luego divido por y

$$\Rightarrow (x+a)^2 y - y^3 = (x-a)(x+a)2y$$

$$\Rightarrow x^2y + 2axy + a^2y - y^3 = 2x^2y - 2a^2y$$

$$\Rightarrow y[x^2 + 2ax + a^2 - y^2) - (2x^2 - 2a^2]y$$

$$\Rightarrow y[3a^2 - (y^2 + x^2 - 2ax)] = 0$$

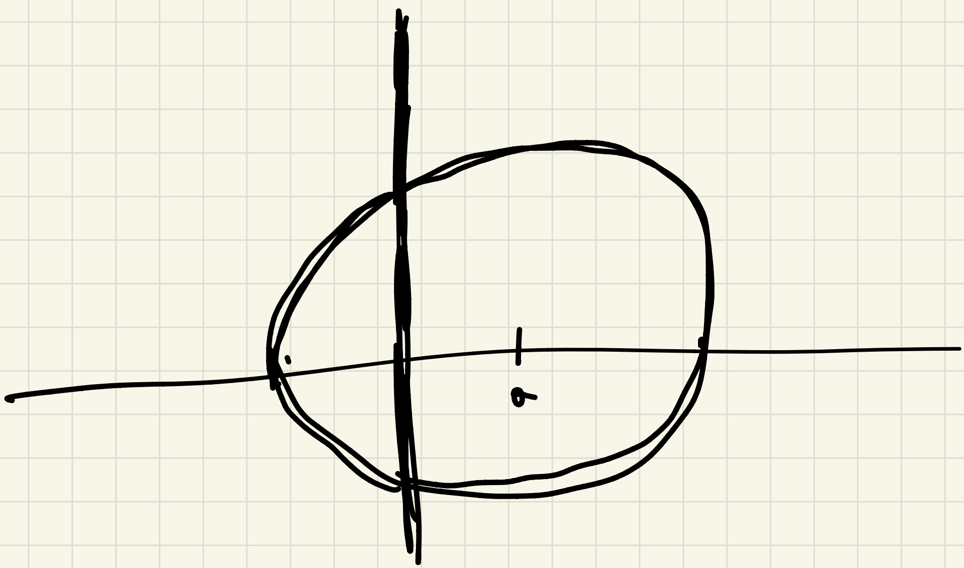
$$\Rightarrow y[4a^2 - ((x-a)^2 + (y-0)^2)] = 0$$

Opción 1 $y=0$ Recta OY

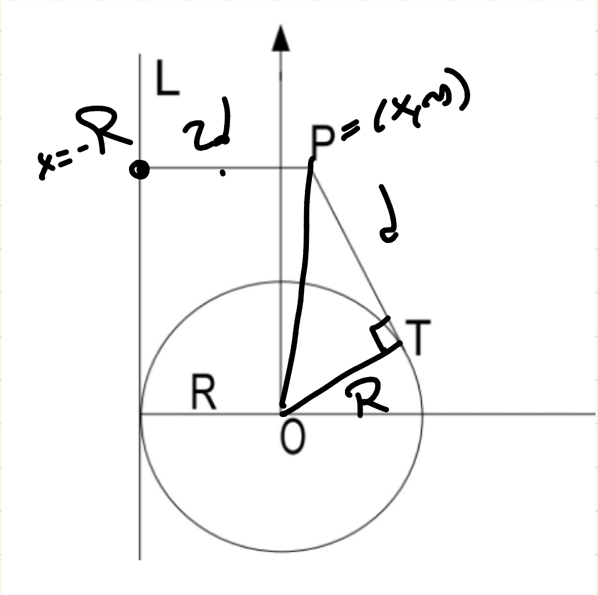
Opción 2 $(x-a)^2+(y-a)^2=(2a)^2$

Circunferencia centro $(a,0)$ y $R=2a$

Es la unión



b)



$$OP = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\left.\begin{aligned} d^2 &= x^2+y^2-R^2 \\ 2d &= |x+R| \end{aligned}\right\}$$

$$4d^2 = \boxed{(x+R)^2 = 4(x^2+y^2-R^2)}$$

$$\Rightarrow x^2 + 2xR + R^2 = 4x^2 + 4y^2 - 4R^2$$

$$5R^2 = 3x^2 - 2xR + 4y^2$$

$$5R^2 + \frac{R^2}{3} = (\sqrt{3}x)^2 - 2\cdot\sqrt{3}x\cdot\frac{R}{\sqrt{3}} + \frac{R^2}{3} + 4(y-0)^2$$

$$\frac{16R^2}{3} = \left(\sqrt{3}x - \frac{R}{\sqrt{3}}\right)^2 + 4(y-0)^2$$

$$\frac{16R^2}{3} = \left(x - \frac{R}{3}\right)^2 \cdot 3 + 4(y-0)^2$$

$$1 = \frac{9}{16R^2}\left(x - \frac{R}{3}\right)^2 + \frac{3}{4R^2}(y-0)^2$$

$$1 = \frac{\left(x - \frac{R}{3}\right)^2}{\left(\frac{4R}{3}\right)^2} + \frac{(y-0)^2}{\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$a = \frac{4R}{3}$$

$$\longrightarrow e = \frac{\sqrt{\frac{16R^2}{9} - \frac{4R^2}{3}}}{\frac{4}{3}R}$$

$$b = \frac{2R}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow e = \frac{\sqrt{\frac{4R^2}{9}}}{\frac{4R}{3}} = \frac{\frac{2R}{3}}{\frac{4R}{3}} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Centro es $\left(\frac{R}{3}, 0\right)$

Focos $= \left(-\frac{R}{3}, 0\right)$ y $(R, 0)$

Directrices: $X = -\frac{7R}{3}$ y $X = 3R$

P3. Considere la función definida por:

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x + 1}$$

Se pide

a) Determinar: Dom(f), ceros, paridad e intersección con el eje OY

b) Determinar los signos de la función, es decir, donde $f(x)$ es positiva y donde es negativa

c) Determinar los intervalos de crecimiento, es decir, en que intervalos la función $f(x)$ es creciente y en cuales es decreciente.

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$, solo problem

si: $x + 1 = 0$

Ceros $f(x)=0 \Rightarrow x^2-x=0$

$\Rightarrow x(x-1)=0$

$\Rightarrow x=\{0,1\}$

No es par ni impar, pues

$f(2)=\frac{2}{3}$ y $f(-2)=-6$

$\Rightarrow f(x)\neq f(-x)$ y $-f(x)\neq f(-x)$

Intersección oy $f(0)=0 \Rightarrow (0,0)$

b) Signos $f(x) > 0$

$$\frac{x(x-1)}{x+1} > 0 \qquad \begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=-1 \end{cases}$$

	$-\infty$	-1	0	1	∞
x	$-$	$-$	$+$	$+$	
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$+$	
$x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$	
$\%$	$-$	$+$	$-$	$+$	

$(-1, 0) \cup (1, \infty)$

$f(x)$ es positiva

para $x \in (-1, 0) \cup (1, \infty)$

$f(x)$ es Negativa

para $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$

---

c) $\dfrac{x}{x+1}$ Creciente

$(-\infty, -1) \Rightarrow$

$(-1, \infty)$

Sean $x_1 < x_2 < -1 \Rightarrow x_1 - x_2 < 0$

$x_1 + 1 < 0$

$x_2 + 1 < 0$

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{x_1}{x_1+1} - \frac{x_2}{x_2+1}$$

$$= \frac{x_1(x_2+1) - x_2(x_1+1)}{(x_1+1)(x_2+1)}$$

$$= \frac{x_1 - x_2}{(x_1+1)(x_2+1)} < 0$$

$$\Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$$

Si $-1 < x_1 < x_2$

$$f(x_1) - f(x_1) = \frac{\overbrace{(x_1 - x_2)}^{<0}}{\underbrace{(x_1+1)}_{>0}\underbrace{(x_2+1)}_{>0}} < 0$$

$$< 0$$

$$\Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

$\Rightarrow$ en $(-\infty, -1)$ crece

$(-1, \infty)$ crece