

P1  $f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$

a) Dom, Ceros y paridad

Dom(f), Problema cuando  $1-x^2=0 \Rightarrow x=1 \vee x=-1$

$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

Ceros(f)  $\Rightarrow \frac{2x}{1-x^2} = 0 \Leftrightarrow x=0$

Paridad ¿ $f(-x) = f(x)$ ? o ¿ $f(-x) = -f(x)$ ?

$f(-x) = \frac{2(-x)}{1-(-x)^2} = \frac{-2x}{1-x^2} = -f(x) \Rightarrow f \text{ es impar}$

b) Plg  $\forall y > 0, \exists x \in (0,1)$  tal que  $f(x) = y$

Queremos

$\frac{2x}{1-x^2} = y \Rightarrow x^2 - 1 + 2x = 0$

$\Rightarrow x = \frac{-\frac{2}{y} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{y^2}\right) + 4}}{2}$

$\Rightarrow x = -\frac{1}{y} \pm \sqrt{\frac{1}{y^2} + 1}$

Como quieren que  $x \in (0, 1)$

Vamos a escoger  $x = -\frac{1}{y} + \sqrt{\frac{1}{y^2} + 1}$

$x > 0$

$$x > 0 \Leftrightarrow 0 < -\frac{1}{y} + \sqrt{\frac{1}{y^2} + 1}$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{y} < \sqrt{\frac{1}{y^2} + 1}$$

$| \cdot |^2$ , como son positivos

$\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{y^2} < \frac{1}{y^2} + 1$$

$$\Leftrightarrow 0 < 1$$

$\Leftrightarrow$

$\checkmark$

, por lo que

$x > 0$

$\checkmark$

$x < 1$

$$x < 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{y} + \sqrt{\frac{1}{y^2} + 1} < 1$$

$\Leftrightarrow$

$$\sqrt{\frac{1}{y^2} + 1} < 1 + \frac{1}{y}$$

$| \cdot |^2$ , como son positivos

$\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{y^2} + 1 < \left(1 + \frac{1}{y}\right)^2 = \frac{1}{y^2} + \frac{2}{y} + 1$$

$\Leftrightarrow$

$$0 < \frac{2}{y}$$

$\Leftrightarrow$

$$0 < y$$

$\Leftrightarrow$

$\checkmark$

, por lo que

$x < 1$

S.  $y=0$  , se puede tomar  $x=0 \Rightarrow \boxed{f(0)=0}$

S.P  $y < 0 \Rightarrow -y > 0$  , por propiedad

$$\exists x_y \in (0,1) \Rightarrow f(x_y) = -y$$

$$\stackrel{\text{Impar}}{\Rightarrow} f(-x_y) = y$$

$$\Rightarrow \underbrace{-x_y}_{x_y} \in (-1,0)$$

$$\text{tal que } f(x_y) = y$$

$\Rightarrow \forall y \in \mathbb{R}$  ,  $\exists x \in (-1,1)$  tal que  $f(x) = y$

P2  $f(x) = \sqrt[851]{1-x^{2022}}$

a) Nota que es una raíz impar por lo que  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$   
 Ceros  $\Rightarrow \sqrt[851]{1-x^{2022}} = 0 \Leftrightarrow 1-x^{2022} \Leftrightarrow \boxed{x = \pm 1}$

Paridad:  $f(-x) = \sqrt[851]{1-(-x)^{2022}} = \sqrt[851]{1-x^{2022}} = f(x)$  es Par

b) Sea  $0 < x_1 < x_2 \Rightarrow 0 < x_1^{2022} < x_2^{2022}$

$\Rightarrow 1-x_1^{2022} > 1-x_2^{2022}$   
 $\stackrel{\text{de creciente}}{\Rightarrow} \sqrt[851]{1-x_1^{2022}} > \sqrt[851]{1-x_2^{2022}}$

$\Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow$  De creciente

Como  $f$  es par  $\Rightarrow (-\infty, 0)$  es creciente

Sea  $y \in (-\infty, 1] \Rightarrow x = \sqrt[851]{1-y}$   
 $\Rightarrow f(x) = y$

$\Rightarrow \text{Im}(f) = (-\infty, 1]$