P3

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|-1} & \text{si} \quad |x| > 1 \\ [x]\sqrt{1-x^2} & \text{si} \quad |x| \leq 1 \end{cases}$$

Vamos a asumir $[x] = \{y \in \mathbb{Z} \mid y \leq x \;,\; y+1 > x\}$

a) Para $[-1,0) \Rightarrow [x] = -1$

$$f(x) = -\sqrt{1-x^2}$$

Sea $x_1 < x_2 \Rightarrow -1 \leq x_1 < x_2 < 0$

$$\Rightarrow \quad 1 \geq x_1^2 > x_2^2 > 0$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq 1 - x_1^2 < 1 - x_2^2 < 1$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq \sqrt{1-x_1^2} < \sqrt{1-x_2^2} < 1$$

$$\Rightarrow \quad 0 \geq -\sqrt{1-x_1^2} > -\sqrt{1-x_2^2} > -1$$

$$f(x_1) > f(x_2)$$

$\Rightarrow$ Decreciente, más aún estrictamente!

Para $[0,1]$.

Si $x \in [0,1) \Rightarrow [x] = 0$
Si $f(1) = 1\sqrt{1-1^2} = 0$ $\Big\}$ $x \in [0,1]$ $\Rightarrow f(x) = 0$

Constante es creciente y decreciente

Para $|x| > 1$ $\quad f(x) = \dfrac{x}{|x|-1}$

$$f(-x) = \frac{(-x)}{|x|+1} = -\frac{x}{|x|+1} = -f(x) \quad \text{impar}$$

Sea $(1,\infty)$

Sean $x_1, x_2 \in (1,\infty)$ y $1 < x_1 < x_2 < \infty$.

$$f(x_1) = \frac{x_1}{x_1 - 1}, \quad f(x_2) = \frac{x_2}{x_2 - 1}$$

Idea $\quad x_1(x_2-1) \boxed{\ } x_2(x_1-1)$
$\quad x_1x_2 - x_1 \boxed{\ } x_2x_1 - x_2$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \quad / + x_1x_2$$
$$\Rightarrow x_1x_2 - x_1 > x_1x_2 - x_2$$
$$x_1(x_2-1) > x_2(x_1-1) \quad / \text{Como } x_i - 1 > 0$$
$$\frac{x_1}{x_1-1} > \frac{x_2}{x_2-1} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Decreciente $\Rightarrow$ $(-\infty, -1)$ es decreciente
Impr.

c) $\forall x \in (1, \infty)$, se cumple $f(x) > 1$

Sea $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$, como $x > 1 \Rightarrow x - 1 > 0$

y $x > x - 1 > 0$

$\Rightarrow \dfrac{x}{x-1} > 1 > 0$

$\Rightarrow \dfrac{x}{x-1} = \boxed{f(x) > 1}$

d) Paridad: es impar

Ceros: $x = \{-1\} \cup [0,1]$

inyectividad: No tiene, pues $f(-1) = f(1)$ y $1 \neq -1$

e) Calculamos los recorridos de

① $-\sqrt{1-x^2}$ con $x \in [-1,0)$

② $\frac{x}{x-1}$ con $x \in (1,\infty)$

③ $\frac{x}{-x-1}$ con $x \in (-\infty,-1)$ $\}$ es el impar de ②

① $y = -\sqrt{1-x^2} \Rightarrow y^2 = 1-x^2 \Rightarrow x^2 = 1-y^2$

$\Rightarrow x = -\sqrt{1-y^2}$, pues $x \in [-1,0)$

$\Rightarrow -1 \leq -\sqrt{1-y^2} < 0$

$\Rightarrow 1 \geq 1-y^2 > 0 \Rightarrow y \in [-1,1]$, pero $y = -\sqrt{}$

$\Rightarrow \boxed{y \in (-1,0]}$

② $y = \frac{x}{x-1}$, cu $x \in (1, \infty)$

$\Rightarrow xy - y = x \Rightarrow x(y-1) = y$

$\Rightarrow x = \frac{y}{y-1}$

$\Rightarrow 1 < \frac{y}{y-1} \Rightarrow$

$0 < \frac{y}{y-1} - \frac{y-1}{y-1} = \frac{1}{y-1} \Rightarrow \boxed{y > 1}$

③ $\Rightarrow \boxed{y < -1}$

$\Rightarrow \boxed{Im(f) = (-\infty, -1) \cup (-1, 0] \cup (1, \infty)}$