MA1001 Introducción al Cálculo

Auxiliar 9: Axioma del Supremo II y Sucesiones

18 de octubre de 2022

P1. Pruebe que:

a) $\inf \left\{ \dfrac{1}{n^2+2n+1} : n \in \mathbb{N} \right\} = 0$

b) $\sup\{\frac{n}{n+1} | n \in \mathbb{N}\} = 1$

c) $\sup(\mathbb{Q}^c \cap [-1,1))$

d) $\inf\{\cos(q) | q \in Q\}$

P2. Pruebe los siguientes límites por definición

a) $\lim \dfrac{2n-5}{2n-7} = 1$

b) $\lim \dfrac{2n^2+1}{3n^2+6n+2} = \dfrac{3}{2}$

c) $\lim \sqrt{4+\dfrac{1}{2n}} = 2$

d) $\cos(n!\pi) = 1$

P3. Calcule los siguientes límites:

a) $\dfrac{\cos(n\pi)}{n}$

b) $\dfrac{n+2022}{n^5}$

c) $\dfrac{n\sin(\frac{n\pi}{2})}{n^2+1}$

Recuerdos y Consejos

Axioma 8 (Axioma del Supremo) Todo conjunto no vacío y acotado superiormente posee un supremo

Teorema(Propiedad Arquimediana). El conjunto $\mathbb{R}$ es arquimediano, es decir, para todo real $x > 0$, existe un natural $n \in \mathbb{N}$, tal que $nx > 1$.

Teorema Los racionales son densos en los reales. Esto signica que dados dos reales x, y con $x < y$, entonces existe un racional r tal que $x < r < y$.
Observación: La densidad también se puede ver de la siguiente manera: Un conjunto D se dice denso sobre otro X (por ejemplo $\mathbb{Q}$ sobre $\mathbb{R}$) si para cualquier elemento X existe uno de D que esta tan cerca como uno quiera.

Definición (Convergencia) Diremos que la sucesión (s_n) converge a L o bien que los términos s_n tienden a L (lo cual anotaremos $s_n \to L$) si se cumple que: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant N_0) s_n \in [L‘ - \varepsilon, L + \varepsilon]$.
Sucesiones nulas (s_n) se llamara sucesión nula si $s_n \to 0$.
Sucesiones acotada (s_n) se llamara sucesión acotada si $(\exists M > 0)(\forall n \in \mathbb{N}) |s_n| \leqslant M$.
Teorema El producto de una sucesión nula y acotada, es una sucesión nula.

Álgebra de límites
$\lim u_n + v_n = \lim u_n + \lim v_n$
$\lim u_n v_n = (\lim u_n)(\lim v_n)$
$\lim \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{\lim u_n}{\lim v_n}$ (Si $\lim v_n \neq 0$)
$\lim \lambda u_n = \lambda \lim u_n$