**MA1001 Introducción al Cálculo**

# Auxiliar 9: Axioma del Supremo II y Sucesiones

18 de octubre de 2022

**P1.** Pruebe que:

*a)* $\inf\left\{\dfrac{1}{n^2+2n+1} : n \in \mathbb{N}\right\} = 0$

*b)* $\sup\{\frac{n}{n+1} | n \in \mathbb{N}\} = 1$

*c)* $\sup(\mathbb{Q}^c \cap [-1,1))$

*d)* $\inf\{\cos(q) | q \in Q\}$

**P2.** Pruebe los siguientes límites por definición

*a)* $\lim \dfrac{2n-5}{2n-7} = 1$

*b)* $\lim \dfrac{2n^2+1}{3n^2+6n+2} = \dfrac{3}{2}$

*c)* $\lim \sqrt{4+\dfrac{1}{2n}} = 2$

*d)* $\cos(n!\pi) = 1$

**P3.** Calcule los siguientes límites:

*a)* $\dfrac{\cos(n\pi)}{n}$

*b)* $\dfrac{n+2022}{n^5}$

*c)* $\dfrac{n\sin(\frac{n\pi}{2})}{n^2+1}$

(Teo 9.2)

## Recuerdos y Consejos

**Axioma 8 (Axioma del Supremo)** Todo conjunto no vacío y acotado superiormente posee un supremo

**Teorema**(Propiedad Arquimediana). El conjunto $\mathbb{R}$ es arquimediano, es decir, para todo real $x > 0$, existe un natural $n \in \mathbb{N}$, tal que $nx > 1$.

**Teorema** Los racionales son densos en los reales. Esto signica que dados dos reales $x, y$ con $x < y$, entonces existe un racional $r$ tal que $x < r < y$.
**Observación:** La densidad también se puede ver de la siguiente manera: Un conjunto $D$ se dice denso sobre otro $X$ (por ejemplo $\mathbb{Q}$ sobre $\mathbb{R}$) si para cualquier elemento $X$ existe uno de $D$ que esta tan cerca como uno quiera.

**Definición (Convergencia)** Diremos que la sucesión $(s_n)$ converge a $L$ o bien que los términos $s_n$ tienden a $L$ (lo cual anotaremos $s_n \to L$) si se cumple que: $(\forall\varepsilon > 0)(\exists N_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant N_0)s_n \in [L` - \varepsilon, L + \varepsilon]$.
**Sucesiones nulas** $(s_n)$ se llamara sucesión nula si $s_n \to 0$.
**Sucesiones acotada** $(s_n)$ se llamara sucesión acotada si $(\exists M > 0)(\forall n \in \mathbb{N})|s_n| \leqslant M$.
**Teorema** El producto de una sucesión nula y acotada, es una sucesión nula.

**Álgebra de límites**
$\lim u_n + v_n = \lim u_n + \lim v_n$
$\lim u_n v_n = (\lim u_n)(\lim v_n)$
$\lim \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{\lim u_n}{\lim v_n}$ (Si $\lim v_n \neq 0$)
$\lim \lambda u_n = \lambda \lim u_n$

**P1.** Pruebe que:

a) $\inf\left\{\dfrac{1}{n^2+2n+1} : n \in \mathbb{N}\right\} = 0$

b) $\sup\{\frac{n}{n+1} | n \in \mathbb{N}\} = 1$

c) $\sup(\mathbb{Q}^c \cap [-1,1))$

d) $\inf\{\cos(q) | q \in Q\}$

a) Infimo: LA mayor de las cotas inferiores

PDQ el 0 es cota inferior

Sea $n \in \mathbb{N}$ cual quiera

$$\boxed{0 < \frac{1}{n^2+2n+1}} \iff 0 < \underbrace{n^2+2n+1}_{(n+1)^2}$$

$$\iff V$$

$\Rightarrow$ 0 es cota inferior

$$\boxed{\text{Suponer } \exists\, i \in \mathbb{R},\ i>0,\ \underline{\forall n \in \mathbb{N}}\quad \underline{i \le \frac{1}{(N+1)^2}}}$$

Encontrar $N^*$ tal que

$$\frac{1}{(N^*+1)^2} < i \overset{(\,)^{-1}}{\iff} (N^*+1)^2 > \frac{1}{i}$$

$$\overset{\sqrt{\ }}{\iff} N^*+1 > \frac{1}{\sqrt{i}}$$

$$\iff N^* > \frac{1}{\sqrt{i}} - 1$$

Basta

$$\boxed{N^* = \left\lceil \frac{1}{\sqrt{i}} - 1 \right\rceil + 1}$$

$\exists N^{\circ} \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{(N^{\circ}+1)^2} < i$ $\cancel{\rightarrow}$

$\Rightarrow$ 0 es la mayor cota inferior

es el ínfimo

b) $\sup \left\{ \frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\} = 1$

Como $n = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$

$\frac{1}{2} \in \left\{ \frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\} \neq \emptyset$

<u>Probar</u> 1 cota superior

$\forall n \in \mathbb{N}$

$\frac{N}{N+1} \leq 1 \Leftrightarrow N \leq N+1$

$\Leftrightarrow$ V

✓ 1 es cota superior

En virtud del Ax Supremo hay supremo $\Longrightarrow$

---

Suponemos que $\exists\, s \in \mathbb{R}$ tq que

$s < 1$ y $\forall n \in \mathbb{N}$ $\frac{n}{n+1} \leq s$

---

Buscar $n^*$

$$s < \frac{n^*}{n^*+1} \iff s(n^*+1) < n^*$$

$$\underset{1-s>0}{\iff} s < n^* - s n^*$$

$$\iff \frac{s}{1-s} < n^*$$

Basta tomar $n^* = \left[\frac{s}{1-s}\right] + 1$

$= \quad r < \frac{N^*}{N^*+1} \quad \times$

$\Rightarrow \quad 1$ es supremo

c) $\sup\{\mathbb{Q}^c \cap [-1,1)\} = \underline{1}$

¿Que es que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$?

Sean $r_1, r_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Q}$ tal que

$$r_1 < q < r_2$$

Primero 1 sea cota superior

Sea $x \in \mathbb{Q}^c \cap \underline{[-1,1)} \Rightarrow -1 \leq x < \underline{1}$

$\Longrightarrow$ 1 es cota superior

Supongamos que $\exists\, r \in \mathbb{R}$ tal que

$\underline{r < 1}$ y $\underline{\forall x \in \mathbb{Q}^c \cap [-1, 1),\ x \leq r}$

Menor

Cota

$0 < \frac{\sqrt{2}}{8} \leq r$

Idea $\underline{r} < y < \underline{1}$ ~~—~~

$y \in [-1, 1) \cap \mathbb{Q}^c$

$y = \frac{r+1}{2}$

Como $r < 1$ por densidad

$\exists\, y \in \mathbb{Q}^c$ tal que $0 < r < y < 1$

Como $y \in [-1,1) \Rightarrow y \in \mathbb{Q}^c \cap [-1,1)$

Pero $y > r$ y

$\forall x \in \mathbb{Q}^c \cap [-1,1) \quad x \leq r$

$\Rightarrow 1$ es el supremo

d) Idea $\quad \inf \{ \cos(r) : r \in \mathbb{R} \} = -1$

(Es mínimo)

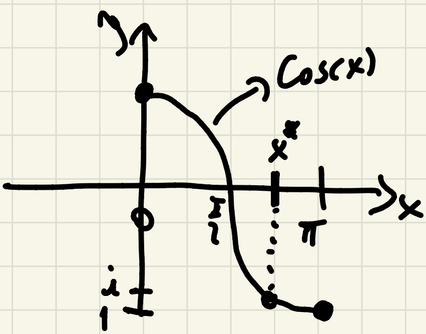
$-1 \leq \cos(q) \leq 1 \quad \forall q \in \mathbb{R} \Rightarrow \forall q \in \mathbb{Q}$

Por lo tanto es cota inferior

* Falta que sea la mayor

Suponiendo que existe $i \in \mathbb{R}$

tal que $-1 < i \leq \cos(q), \forall q \in \mathbb{Q}$




$\Rightarrow \quad \cos(x^*) = i$

$\cos(\pi) = -1$

Usando que $x^* < \pi$ y son reales

Por densidad $\exists q^* \in \mathbb{Q}, \quad x^* < q^* < \pi$

$\Rightarrow \cos(x^\circ) > \cos(q^\circ) > \cos(\pi)$

$\Rightarrow \quad i > \cos(q^\circ) > -1$

$\cancel{\ }$ , pues $\exists q^\circ \in \mathbb{Q}$ tal que

$\cos(q^\circ) < i \Rightarrow -1$ es ínfimo

**P2.** Pruebe los siguientes límites por definición

a) $\lim \frac{2n-5}{2n+7} = 1$ $\quad \frac{2n-5}{2n+7} \to a_n$, $\quad 1 \to \ell$

b) $\lim \frac{2n^2+1}{3n^2+6n+2} = \frac{2}{3}$

c) $\lim \sqrt{4+\frac{1}{2n}} = 2$

d) $\cos(n!\pi) = 1$

a) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0$

$$|a_n - \ell| < \varepsilon$$

---

$$|a_n - \ell| = \left| \frac{2n-5}{2n+7} - 1 \right|$$

$$= \left| \frac{2n-5-2n-7}{2n+7} \right|$$

$$= \frac{12}{2n+7} < \frac{12}{2n} = \frac{6}{n}$$

$$\frac{6}{N} < \varepsilon \Longrightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon ?$$

$$\frac{6}{N^*} < \varepsilon \iff \frac{6}{\varepsilon} < N^*$$

Basta tomar $N^* = \left[\frac{6}{\varepsilon}\right] + 1$

$\forall n \geq N^*$ $\Rightarrow$ $$\frac{6}{N} < \frac{6}{N^*} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |a_n - \ell| < \frac{6}{N^*} < \varepsilon$$

b) $\left| \frac{2N^2+1}{3N^2+6N+2} - \frac{2}{3} \right|$

$= \left| \frac{\cancel{6N^2}+3-\cancel{6N^2}-12N-4}{3(3N^2+6N+2)} \right|$

$= \frac{12N+1}{3(3N^2+6N+2)} \leq \frac{12N+N}{3(3N^2+6N+2)}$

$\uparrow$

$\leq \frac{13N}{3(3N^2+6N+2)}$

$\leq \frac{13N}{9N^2} = \frac{13}{9N}$

$$\frac{13}{9N^*} < \varepsilon \iff \frac{13}{9\varepsilon} < N^*$$

Basta Tomar $N^* = \left[\frac{13}{9\varepsilon}\right] + 1$

$$\Rightarrow \frac{13}{9N^*} < \varepsilon \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon$$

c) $$\left|\sqrt{4+\frac{1}{2N}} - 2\right| = \left|\frac{\left(\sqrt{4+\frac{1}{2N}} - 2\right)\left(\sqrt{4+\frac{1}{2N}} + 2\right)}{\sqrt{4+\frac{1}{2N}} + 2}\right|$$

$$= \left|\frac{\cancel{4}+\frac{1}{2N} - \cancel{4}}{\sqrt{4+\frac{1}{2N}} + 2}\right|$$

$$= \left| \frac{1}{2N} \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{2N}}+2} \right) \right|$$

$$= \frac{1}{2N} \cdot \underbrace{\left( \frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{2N}}+2} \right)}_{\Rightarrow \text{ menor que } 1}$$

$$\leq \frac{1}{2N}$$

$$\leq \frac{1}{N}$$

Por lo Tanto si :

$$\frac{1}{N} < \varepsilon \Rightarrow |a_N - l| < \varepsilon$$

Entonces sea $N^* > \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$

$N \geq N^*$
$\Rightarrow \quad \frac{1}{N} < \frac{1}{N^*} < \varepsilon$

$\Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon$ ✓

d) $\cos(n!\pi)$

Notar que si $n \geq 2$ $\quad n! = 2 \cdot \ldots\ldots$
$\Rightarrow$ Es par

$\Rightarrow n!\pi = 2K\pi$

$\Rightarrow \cos(n!\pi) = 1$ (Es constante)

Si $N_0 = 2 \Rightarrow \forall_{n \geq N_0}$

$|\cos(n!\pi) - 1| = 0 < \varepsilon$ ✓

**P3.** Calcule los siguientes límites:

a) $\dfrac{\cos(n\pi)}{n}$ b) $\dfrac{n+2022}{n^5}$ c) $\dfrac{n\sin(\frac{n\pi}{2})}{n^2+1}$

a) Nula · Acotada

Acotada $\to$ Constante

Acotada $\to$ $[a, b]$

Acotada $\to$ Converge

Nula · Acotada = Nula

$$\frac{\cos(n\pi)}{n} = \underbrace{\cos(n\pi)}_{\text{Acotada}} \cdot \underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{Nula}}$$

Asumir que es nula

$\cos(x) \in [-1, 1]$

Teorema nula por Acotada

$\Rightarrow$ Nula ✓

$$\left| b_n \right| \leq a_n \to 0$$

$$\to b_n \to 0$$

Teorema 9.2

$$\left| \frac{1}{n^k} \right| = \frac{1}{n^k} < \frac{1}{n} \longrightarrow \text{Nula}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{n^k} \quad \text{Nula}$$

b) $$\frac{n+2022}{n^5} = \frac{n}{n^5} + \frac{2022}{n^5}$$

$$= \frac{1}{n^4} + \frac{2022}{n^5}$$

Auxiliar

$\frac{1}{N^4} < \frac{1}{N}$ Nula

(pues $N^4 > N$)

$\frac{1}{N^5}$ Similarmente es nula

---

$$\frac{2022}{N^5} = \underbrace{2022}_{\text{Acotada}} \cdot \underbrace{\frac{1}{N^5}}_{\substack{\text{Nula} \\ \text{Auxiliar}}} = \text{Nula}$$

Como $\frac{1}{N^4}$ y $\frac{2022}{N^5}$ son nulas

Su suma es nula $\Rightarrow \frac{N+2022}{N^5}$

es nula

Propuesto

$$\frac{n+2022}{n}$$ → Converge 1 (Acotada)

$$\frac{1}{n^4}$$ → Nula

c) $$\frac{n \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2+1} = \frac{n}{n^2+1} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$\frac{n}{n^2+1}$: Nula

$\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$: Acotada

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \in [-1, 1] \Rightarrow \text{Acotada}$$

$$\left|\frac{n}{n^2+1}\right| \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \rightarrow \text{Es nula}$$

$\Rightarrow \dfrac{n}{n^2+1}$ es nula

Nula por Acotada

$\Rightarrow \dfrac{n}{n^2+1} \cdot \sin\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)$ es nula