MA1001 Introducción al Cálculo

Auxiliar 10: Sucesiones

26 de octubre de 2022

P1. Calcular

$$\lim \frac{\frac{4}{n} + \frac{5}{\sqrt{n}} \sin(n^n) + \frac{1-3n}{n+5} +}{\frac{5^n}{n!} + \frac{(-1)^n}{n^2} + \frac{1}{1 - \frac{2n!}{n^n}}}$$

P2. Se define por recurrencia la sucesión u_n mediante

$$u_1 = 1; \qquad u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4 \qquad \forall n \geqslant 1$$

a) Probar por inducción que $u_n < 6$

b) u_n es estrictamente creciente

c) Decida si u_n converge y en tal caso calcule su límite

P3. Calcule los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + 2^n}$

b) $\sqrt[n]{n + \sin(n!)}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-3n^2 - 2}{2n^2 + n + 1}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{6^n}{8^n + 3^n}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \cdot \sum\limits_{k=0}^{n} \left(\dfrac{k}{n}\right)^3$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n + (-1)^n}{n - \cos(n!)}$

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{4^n + n \cdot 2^n + 4 \cdot 3^n}$

h) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{n}{n^2 + k}$

Recuerdos y Consejos

1. $s_n = a$, para $a \in \mathbb{R}$, satisface $\lim s_n = a$.
2. $\lim \frac{1}{n} = 0$.
3. $\lim \frac{1}{n^k} = 0$, para $k \in \mathbb{N}$.
4. $s_n = n^k$, para $k \in \mathbb{N}$, no es acotada luego diverge.
5. $s_n = \dfrac{a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{b_q n^q + b_{q-1} n^{q-1} + \cdots + b_1 n + b_0}$, para $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
6. si $p < q$, entonces $s_n \to 0$
7. si $p = q$, entonces $s_n \to \frac{a_p}{b_q}$
8. si $p > q$, entonces $\frac{1}{s_n} \to 0$. Entonces (s_n) no es acotada y luego diverge.
9. $\lim \frac{n!}{n^n} = 0$.
10. $\lim \frac{a^n}{n!} = 0$, para $a \in \mathbb{R}$.

Teorema del Sándwich
Sean u_n, v_n dos sucesiones tal que convergen a l y $\exists n_0$ tal que $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant a_n \leqslant v_n$, entonces $a_n \to l$
Teorema Sea (s_n) una sucesión creciente y acotada superiormente (o decreciente y acotada inferiormente), entonces s_n converge.