

Auxiliar 2.

$\frac{P}{L}$

a) $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0$

$$x^2 + \frac{2}{x} \geq 3 \quad \left. \vphantom{x^2 + \frac{2}{x} \geq 3} \right\} \text{Solución de } X = W$$

Primero tomamos que ver que tengo una fracción donde el denominador no puede ser nulo \Rightarrow $x \neq 0$; $x \in \text{Dom}$ $\} \text{sol } W \in$

• Notamos que nos dan el hint = Ayuda.
 $(x-1)^2(x+2)$

Veamos tomamos en un comienzo
 $x \in \mathbb{R}, x > 0, x \neq 0$

$$\Rightarrow x \in \mathbb{R} \cap \mathbb{R}^+ \cap [\mathbb{R} - \{0\}]$$

$$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \cap]0, \infty[\cap \mathbb{R} - \{0\}$$

$$\Leftrightarrow x \in]0, \infty[\text{ como primera condición}$$

$$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}_+$$

Sabemos que $(x-1)^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
en particular para $x \in \mathbb{R}_+$

$$(x-1)^2 \geq 0$$



pero recordamos
que una desigualdad
preserva su orden
si es multiplicada
por algo positivo



(o reducida)

$$x > 0 \quad / + 2$$

$$x+2 > 2 > 0 \quad \text{transitiva!}$$

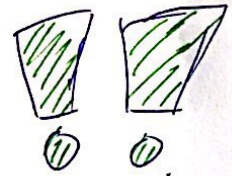
$$\Rightarrow x+2 > 0$$



$$\Rightarrow (x-1)^2 \geq 0 \quad / \cdot (x+2)$$

$$\Rightarrow (x-1)^2(x+2) \geq 0 \cdot (x+2)$$

O amiguita \Downarrow !!



$$\Rightarrow (x-1)^2(x+2) \geq 0$$

$$\Rightarrow (x^2 - 2x + 1)(x+2) \geq 0$$

$$\Rightarrow x^3 - 2x^2 + x + 2x^2 - 4x + 2 \geq 0$$

$$\Rightarrow x^3 - 3x + 2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x^3 - 3x + 2 + 3x)}{x} \geq \frac{+3x}{x}$$

Bigodiva
/ + 3x / \cdot \frac{1}{x} \quad | x \neq 0
Puedo!

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{2}{x} \geq 3 \quad \square$$

$$b) \forall k, \delta \in \mathbb{R}, k, \delta > 0$$

$$k^3 + 2 \cdot \delta^3 \geq 3 \cdot k \cdot \delta^2 / \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{\delta^2} k, \delta \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{k^2}{\delta^2} + \frac{2 \cdot \delta}{k} \geq 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{k^2}{\delta^2} + \frac{2}{\left(\frac{k}{\delta}\right)} \geq 3$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{k}{\delta}\right)^2 + \frac{2}{\left(\frac{k}{\delta}\right)} \geq 3$$



Puede ir de ida y vuelta
Pues no hago ninguna \Rightarrow , \Leftarrow
si no \Leftrightarrow

$$\Rightarrow \text{por a)} \quad x^2 + \frac{2}{x} \geq 3 \quad \text{si } x = \left(\frac{k}{\delta}\right)$$

$$\left(\frac{k}{\delta}\right)^2 + \frac{2}{\left(\frac{k}{\delta}\right)} \geq 3 \quad / \cdot k \cdot \delta^2, \neq 0$$

$$\Rightarrow k^3 + 2 \delta^3 \geq 3 k \delta^2 \quad \square$$

$$c) \forall x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$$

$$(x+y+z)(x^{-1}+y^{-1}+z^{-1}) \geq 9 \quad \text{①}$$

Recordamos

$$(x-y)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \quad / +2xy$$

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \quad / \frac{1}{xy} \quad ; x \neq 0, y \neq 0$$

$$\boxed{\frac{x^2 + y^2}{xy} \geq 2} \quad \left. \vphantom{\frac{x^2 + y^2}{xy}} \right\} \begin{array}{l} \text{SAMUEL} \\ \hline \text{VARIABLE} \end{array}$$

$$(x+y+z)(x^{-1}+y^{-1}+z^{-1})$$

$$= \underbrace{x \cdot x^{-1}}_1 + \cancel{y \cdot x^{-1}} + z \cdot x^{-1} + \underbrace{x \cdot y^{-1}}_1 + \underbrace{y \cdot y^{-1}}_1 + z \cdot y^{-1} + \underbrace{x \cdot z^{-1}}_1 + \underbrace{y \cdot z^{-1}}_1$$

$$= 3 + \underline{y x^{-1}} + \underline{z x^{-1}} + \underline{x y^{-1}} + \underline{z y^{-1}} + \underline{x z^{-1}} + \underline{y z^{-1}} \quad \# \text{ SAMO's!}$$

$$= 3 + \frac{y^2+x^2}{xy} + \frac{x^2+z^2}{xz} + \frac{z^2+y^2}{zy} \geq 3+2+2+2=9 \quad \square$$

d) $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$ recordando que son
 $a^2 + b^2 = 1$
 $c^2 + d^2 = 1 \Rightarrow ac + bd \leq 1$ variables mudas.

① $(a-c)^2 \geq 0$ # la desigualdad se
~~②~~ $(b-d)^2 \geq 0$ pte está bajo la suma.

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \Leftrightarrow a^2 - 2cd + b^2 + b^2 - 2bd + d^2 \geq 0$$

hipótesis $\Rightarrow \underbrace{a^2 + b^2}_1 + \underbrace{c^2 + d^2}_1 - 2bd - 2ac \geq 0 \quad / + 2bd + 2ac$

$$\Leftrightarrow 2 \geq 2(bd + ac) \quad / \frac{1}{2}$$

$$1 \geq (bd + ac) \quad \square$$

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^2 + (-2x) + 2}{x^2 - 3x + 2} \rightarrow 1$$

1) Buscamos los puntos críticos
 pero siempre intentaremos dejar

$$\frac{p(x)}{q(x)} \geq 0 \quad \text{Así todo t puedes ir}$$

$$\frac{p(x)}{q(x)} \leq 0$$

$$\frac{p(x)}{q(x)} > 0$$

$$\frac{p(x)}{q(x)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + (-2x) + 2}{x^2 - 3x + 2} - 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x + 2 - x^2 + 3x - 2}{x^2 - 3x + 2} \geq 0$$

$$\frac{x}{(x-2)(x-1)} \geq 0 \quad \# \text{ punto crítico}$$

$$x_1 - 2 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 2$$

$$x_2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x_2 = 1$$

$$\Rightarrow x = x_3 = 0$$

	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
X		$-$	$+$	$+$	$+$
$X-2$		$-$	$-$	$-$	$+$
$X-1$		$-$	$-$	$+$	$+$

$- \quad + \quad - \quad +$

Como se pide $\frac{X}{(X-2)(X-1)} \geq 0$ lo que es equivalente.

Sea $x \in [0, 1] \cup [2, +\infty[//$

$$b) \frac{4x-3}{6x} \leq \frac{8x-6}{5x} \Leftrightarrow \frac{4x-3}{6x} - \frac{(8x-6)}{5x} \leq 0$$

\Leftrightarrow

$$\frac{20x-15-48x+36}{30x} \leq 0$$

\Leftrightarrow

$$\frac{21-28x}{30} \leq 0$$


$$\frac{7-8x}{10} \leq 0$$

~~\Leftrightarrow~~

$$\Leftrightarrow \frac{20x - 15 - 48x + 36}{30x} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{21 - 28x}{30x} \leq 0 \quad / \cdot \frac{1}{7}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3 - 4x}{210x} \leq 0 \cdot \frac{1}{7} = 0$$

Puntos críticos!  Bien!

$$3 - 4x = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{4}$$

$$210x = 0 \Rightarrow x = 0, \quad 210 \neq 0$$

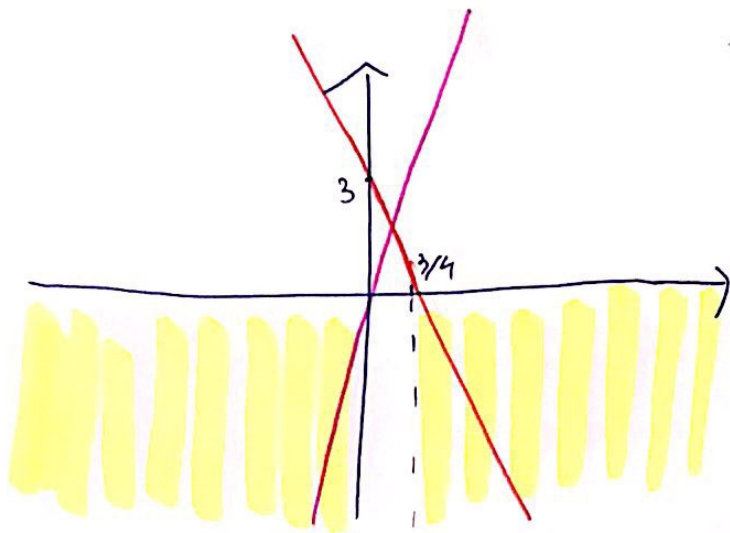
	$-\infty$	0	$\frac{3}{4}$	$+\infty$
$3 - 4x$	+	+	-	
$210x$	-	+	+	

- + -

\Rightarrow Sol

$$S =]-\infty, 0[\cup]\frac{3}{4}, +\infty[$$

Puede ser abierto o cerrado, depende de $f(x) \leq 0$ / $f(x) < 0$



— $210x$

— $3-4x$

$$\frac{3-4x}{210x} < 0$$

$$]-\infty, 0[\cup]\frac{3}{4}, \infty[$$

Como se puede verificar la solución gráfica coincide con la solución analítica.



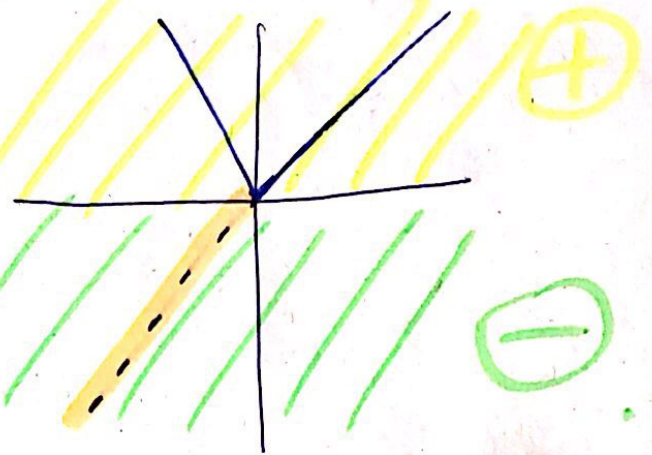
No tenemos que

$$\frac{[X \cdot (X+2) - |X+2| \cdot |X-3|]}{(X+1)(X-2)} < 0 \quad \left. \vphantom{\frac{[X \cdot (X+2) - |X+2| \cdot |X-3|]}{(X+1)(X-2)}} \right\} \text{ "Felipe"}$$

Primero recordemos la definición de $| \cdot |$

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Pues esta todos los valores negativos los hace positivos.



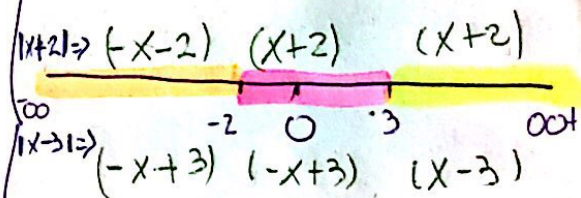
- He destacado con los valores absolutos
 pues para distintos intervalos de $\mathbb{R} - \{-1, 2\}$
 voy a tener distintas expresiones
 Para "Felipe"

Sabemos que si $x < -2$
 $\Rightarrow |x+2| = -(x+2) = -x-2 //$

Sabemos que si $x > -2$
 $\Rightarrow |x+2| = x+2 //$

Sabemos que si $x < 3$
 $\Rightarrow |x-3| = -(x-3) = -x+3 //$

Sabemos que si $x > 3$
 $\Rightarrow |x-3| = x-3 //$



Entonces tenemos
3 intervalos a analizar

- $(-\infty, -2)$
- $(-2, 3)$
- $(3, \infty)$

Caso $(-\infty, -2)$

$$\Rightarrow \frac{-x \cdot (x+2) - (x+2) - (x-3)}{(x+1)(x-2)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(x+2) - (x+2)(x-3)}{(x+1)(x-2)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x - x^2 + x + 6}{(x+1)(x-2)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x + 6}{(x+1)(x-2)} < 0$$

tomo puntos críticos!

$$3x + 6 = 0 \Rightarrow x = -2$$


$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

	$-\infty$	-2	-1	2	$+\infty$
$3x+6$	-	+	+	+	+
$x+1$	-	-	+	+	+
$x-2$	-	-	-	+	+
	-	+	-	+	

Solución inicial $(-\infty, -2) \cup (-1, 2)$ pero debo \cap (intersección) con el intervalo donde estoy trabajando (mismo caso $(-\infty, -2)$)

solución final $[(-\infty, -2) \cup (-1, 2)] \cap (-\infty, -2) = (-\infty, -2)$

Si: Hay valor absoluto hay tabla! 

Siempre la idea es dejar productos

de la forma

$$\frac{p(x) \cdot q(x)}{g(x) \cdot f(x)} \leq > 0$$

Así solo veo signos!

51

Caso $f(2, 3)$

$$\frac{X(X+2) - (X+2)(X-3)}{(X+1)(X-2)} \quad \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{X^2 + 2X + X^2 - X - 6}{(X+1)(X-2)} \quad \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2X^2 + X - 6}{(X+1)(X-2)} \quad \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2X-3)(X+2)}{(X+1)(X-2)} \quad \neq 0$$

Puntos críticos:



$$2X - 3 = 0 \Rightarrow X = \frac{3}{2}$$

$$X + 2 = 0 \Rightarrow X = -2$$

$$X + 1 = 0 \Rightarrow X = -1$$

$$X - 2 = 0 \Rightarrow X = 2$$

	$-\infty$	-2	-1	$\frac{3}{2}$	2	$+\infty$
$2X-3$		-	-	-	+	+
$X+2$		-	+	+	+	+
$X+1$		-	-	+	+	+
$X-2$		-	-	-	-	+
		+	-	+	-	+

$$[(-2, -1) \cup (\frac{3}{2}, 2)] \cap (-2, 3) = (-2, -1) \cup (\frac{3}{2}, 2)$$

S21

Caso (3, ∞+)

$$\frac{x(x+2) - (x+2)(x-3)}{(x+1)(x-2)} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{x^2} + 2x - \cancel{x^2} + x + 6}{(x+1)(x-2)} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{3x + 6}{(x+1)(x-2)} < 0$$

Misma desigualdad que en caso $(-\infty, -2)$
Así que su solución inicial es

$[-\infty, -2]$ → solución inicial

$$S_3 = (-\infty, -2) \cap (3, \infty+) = \emptyset$$

Donde estoy trabajando

$$S_F = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \rightarrow \emptyset$$
$$= (-\infty, -2) \cup (-2, 1) \cup (3/2, 2).$$

P4 $x, y < 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{1-y^2} \geq \frac{2}{1-xy}$$

- do primeiro que devemos ver

cs

$$(x-z)^2 \geq 0$$

$$(x^2 - 2xz + z^2) \geq 0$$

$$\underline{x^2 + z^2 \geq 2xz \quad \forall x, z \in \mathbb{R}}$$

$$a = x^2$$

$$b = z^2 \Rightarrow a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$\text{Si } a = \frac{1}{1-x^2} \quad ; \quad b = \frac{1}{1-y^2}$$

$$x, y < 1$$

$$xy < 1$$

$$2xy < 2$$

$$2 < -2xy$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{1-y^2} \geq \frac{2}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}} \left\| \frac{(1-x^2)(1-y^2)}{1-x^2-y^2+x^2y^2} \right\| \neq$$

$$x^2 + y^2 \geq 2xy$$

$$-2xy \geq -x^2 - y^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{1-y^2} \geq \frac{2}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}} \geq \frac{2}{\sqrt{1-2xy+x^2y^2}} = \frac{2}{\sqrt{(1-xy)^2}}$$

$$\geq \frac{2}{1-xy}$$

$$\frac{2}{1-xy} \quad \square$$

Terminamos !

Walquier duda a mi correo

pyanez@dim.uchile.cl