Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
08 de Mayo de 2009

Pauta Guía Problemas Semana 10

Profesor: Jorge San Martin H.
Auxiliares: Gianfranco Liberona, Nikolas Tapia

P1. Sea $u_n = \frac{1}{2}(1+(-1)^n)$. Calcular $\lim \frac{u_1+\ldots+u_n}{n}$.

Solución

Notemos que el denominador se escribe como $\sum_{k=1}^n u_k$. Calculemos esta suma.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n u_k &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2}(1+(-1)^k)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n (1+(-1)^k)\\ &= \frac{1}{2}\left[\underbrace{\sum_{k=1}^n 1}_{n} + \sum_{k=1}^n (-1)^k\right]\\ &= \frac{n}{2} + \sum_{k=1}^n (-1)^k.\end{aligned}$$

Para calcular la suma que queda, fijemonos que si n es par, entonces $\sum_{k=1}^n (-1)^k = 0$, pues estamos sumando una cantidad par de terminos de la forma $((-1)+1)$. Si n es impar, $n+1$ es par, y entonces

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k - (-1)^{n+1} = -1.$$

Luego

$$\sum_{k=1}^n u_k = \begin{cases} \frac{n}{2} & n \text{ par} \\ \frac{n}{2} - \frac{1}{2} & n \text{ impar.} \end{cases}$$

Por lo tanto, concluimos que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n u_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & n \text{ par} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} & n \text{ impar.} \end{cases}$$

Con esto intuimos que debería ser que el límite es $\frac{1}{2}$, pero debemos demostrarlo. Es decir, debemos mostrar que

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) \quad \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n u_k - \frac{1}{2}\right| \leq \varepsilon.$$

Notemos que

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n u_k - \frac{1}{2}\right| = \begin{cases} 0 & n \text{ par.} \\ \frac{1}{2n} & n \text{ impar.} \end{cases}$$

Es decir, $\forall n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$0 \leq \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n u_k - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2n}.$$

El Sandwich de Sucesiones implica que

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n u_k - \frac{1}{2}\right| \to 0$$

es decir
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k \to \frac{1}{2}.\blacksquare$$

P2. Dado $k \in \mathbb{N}$, estudie la convergencia de la sucesión $(n^k q_n^n)$, donde $(q_n) \to q$ con $|q| < 1$.
Solución
Como sabemos que $q_n \to q$, entonces $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ se tiene que
$$0 \leq |q_n| \leq \frac{|q|+1}{2}.$$
Elevando a la potencia n obtenemos que
$$0 \leq |q_n|^n \leq \left(\frac{|q|+1}{2}\right)^n.$$
Multiplicando por n^k tenemos que
$$0 \leq n^k |q_n|^n \leq n^k \left(\frac{|q|+1}{2}\right)^n.$$
Notemos que como $|q| < 1$, entonces $\frac{|q|+1}{2} < 1$. Por propiedad demostrada en el apunte sabemos que si $u \in \mathbb{R}$ es tal que $|u| < 1$, entonces $n^k u^n \to 0$. Luego, por Sandwich de Sucesiones concluimos que
$$n^k q_n^n \to 0.\blacksquare$$

P3. Sea (h_n) con $h_n > 0$ y $\left(\frac{1}{nh_n}\right) \to 0$. Demuestre que $\lim \frac{1}{(1+h_n)^n} = 0$.
Solución
Como todos los términos de (h_n) son positivos, inmediatamente obtenemos que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \frac{1}{(1+h_n)^n}$. De la primera desigualdad de Bernoulli tenemos
$$(1+h_n)^n \geq 1 + nh_n$$
es decir
$$\frac{1}{(1+h_n)^n} \leq \frac{1}{1+nh_n}.$$
Estas desigualdades son válidas pues todos los h_n son positivos. En resumen tenemos que
$$0 \leq \frac{1}{(1+h_n)^n} \leq \frac{1}{1+nh_n}.$$
Notando que
$$\frac{1}{1+nh_n} = \frac{\frac{1}{nh_n}}{\frac{1}{nh_n}+1}$$
por la hipótesis del problema, utilizando Álgebra de Límites concluimos que $\frac{1}{1+nh_n} \to 0$ y el Sandwich de Sucesiones implica que
$$\frac{1}{(1+h_n)^n} \to 0.\blacksquare$$

P4. Sea (v_n) con $v_n \in (0,1)$ y $\left(\frac{1}{nv_n}\right) \to 0$. Demuestre que $\lim(1-v_n)^n = 0$.
Solución
Notemos que dado que $v_n \in (0,1)$, entonces $-v_n \in (-1,0)$. Por lo tanto $0 \leq 1 - v_n$ y luego $0 \leq (1-v_n)^n$. Además, por la tercera desigualdad de Bernoulli, tenemos que
$$(1-v_n)^n \leq \frac{1}{1+nv_n}.$$
La desigualdad anterior es válida ya que $-v_n \in (-1,0) \subset \left(-1, \frac{1}{n}\right), \forall n \in \mathbb{N}$. Análogamente al problema anterior se concluye que $\frac{1}{1+nv_n} \to 0$ y por Sandwich de Sucesiones
$$(1-v_n)^n \to 0.\blacksquare$$

P5. Sea (u_n) una sucesión creciente. Probar que la sucesión definida por $v_n = \frac{1}{n}(u_1 + \cdots + u_n)$ es creciente.

Solución

Sea $n \in \mathbb{N}$. Notemos que podemos reescribir v_n como

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k.$$

Para probar lo pedido, analicemos la diferencia $v_{n+1} - v_n$.

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} u_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k \\
&= \frac{n\sum_{k=1}^{n+1} u_k - (n+1)\sum_{k=1}^{n} u_k}{n(n+1)} \\
&= \frac{n(u_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} u_k) - n\sum_{k=1}^{n} u_k - \sum_{k=1}^{n} u_k}{n(n+1)} \\
&= \frac{nu_{n+1} + n\sum_{k=1}^{n} u_k - n\sum_{k=1}^{n} u_k - \sum_{k=1}^{n} u_k}{n(n+1)} \\
&= \frac{nu_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} u_k}{n(n+1)}
\end{aligned}$$

Como sabemos que $\forall n \in \mathbb{N}\ n(n+1) > 0$, estudiemos qué pasa con el numerador. Sabiendo que (u_n) es creciente, tenemos que $\forall k = 1, \ldots, n\ u_k \leq u_n$ y entonces

$$\sum_{k=1}^{n} u_k \leq \sum_{k=1}^{n} u_n = nu_n.$$

Obtenemos que

$$nu_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} u_k \geq nu_{n+1} - nu_n = n(u_{n+1} - u_n) \geq 0.$$

Esto último por el crecimiento de (u_n). Resumiendo, tenemos que $v_{n+1} - v_n \geq 0$, lo que implica que $v_{n+1} \geq v_n$. Esto muestra que (v_n) es creciente.$\blacksquare$

P6. Para $0 \leq a \leq b$ sea $x_1 = a$, $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$ e $y_1 = b$, $y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$. Demostrar que ambas sucesiones poseen límite, que $\lim x_n = \lim y_n$ y que si llamamos l a este último límite se cumple que $\sqrt{ab} \leq l \leq \frac{a+b}{2}$.

Solución

Demostremos que $x_n \leq y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Notemos que

$$\begin{aligned}
& 0 \leq (x_n - y_n)^2 \\
\iff & 0 \leq x_n^2 - 2x_n y_n + y_n^2 \\
\iff & 4x_n y_n \leq x_n^2 + 2x_n y_n + y_n^2 \\
\iff & 4x_{n+1}^2 \leq (x_n + y_n)^2 \\
\iff & x_{n+1}^2 \leq \frac{(x_n + y_n)^2}{4} \\
\implies & x_{n+1} \leq \frac{x_n + y_n}{2} = y_{n+1}
\end{aligned}$$

Lo que es válido para todo $n \in \mathbb{N}$. Demostremos que y_n es decreciente. En efecto

$$\begin{aligned}
y_{n+1} - y_n &= \frac{x_n + y_n}{2} - y_n \\
&= \frac{x_n - y_n}{2} \\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

Lo último pues $x_n \leq y_n$. Por lo tanto (y_n) es decreciente y además acotada inferiormente, entonces es convergente. Ahora veamos que (x_n) es creciente. Observemos que

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \sqrt{x_n y_n} - x_n \\ &\geq \sqrt{y_n y_n} - x_n \\ &= y_n - x_n \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto (x_n) es creciente y como es acotada superiormente, entonces es convergente. Para ver la igualdad de los límites basta notar que

$$\begin{aligned} y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} &\Longrightarrow \lim y_{n+1} = \lim y_n = \frac{\lim x_n + \lim y_n}{2} \\ &\Longrightarrow 2 \lim y_n = \lim x_n + \lim y_n \\ &\Longrightarrow \lim y_n = \lim x_n. \end{aligned}$$

Esto es válido por Álgebra de Límites pues ambos límites existen. Recordemos que para una sucesión (s_n) creciente y acotada superiormente, su límite es $\sup\{s_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$, y para una sucesión (u_n) decreciente y acotada inferiormente, su límite es $\inf\{u_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$. En particular, para (x_n) cualquier término es menor que el límite, y para (y_n) cualquier término es mayor que el límite. Así, considerando $n = 2$ tenemos que

$$\sqrt{ab} = x_2 \leq l \leq y_2 = \frac{a+b}{2}. \blacksquare$$

P7. Sea $u_1 = a$ y $u_{n+1} = \sqrt{\frac{ab^2 + u_n^2}{a+1}}$, con $0 < a < b$. Muestre que (u_n) es acotada, que es convergente y calcule su límite.

Solución

Comencemos viendo que es acotada por b, por inducción sobre n. El caso base es trivial. Supongamos que se cumple para algún $n \in \mathbb{N}$, verifiquemos que se cumple para el caso $n+1$. En efecto

$$\begin{aligned} u_n \leq b &\Longleftrightarrow u_n^2 \leq b^2 \\ &\Longleftrightarrow u_n^2 + ab^2 \leq b^2 + ab^2 \\ &\Longleftrightarrow u_n^2 + ab^2 \leq (a+1)b^2 \\ &\Longleftrightarrow \frac{ab^2 + u_n^2}{a+1} \leq b^2 \\ &\Longleftrightarrow \sqrt{\frac{ab^2 + u_n^2}{a+1}} \leq b \\ &\Longleftrightarrow u_{n+1} \leq b. \end{aligned}$$

Donde todas son equivalencias ya que todos los términos involucrados son positivos. Para demostrar que es convergente, veamos ahora que es creciente. El razonamiento es parecido al anterior.

$$\begin{aligned} u_n \leq b &\Longleftrightarrow u_n^2 \leq b^2 \\ &\Longleftrightarrow au_n^2 \leq ab^2 \\ &\Longleftrightarrow au_n^2 + u_n^2 \leq ab^2 + u_n^2 \\ &\Longleftrightarrow (a+1)u_n^2 \leq ab^2 + u_n^2 \\ &\Longleftrightarrow u_n^2 \leq \frac{u_n^2 + ab^2}{a+1} \\ &\Longleftrightarrow u_n^2 \leq u_{n+1}^2 \\ &\Longleftrightarrow u_n \leq u_{n+1}. \end{aligned}$$

Donde nuevamente todo es equivalencia por las mismas razones. Como (u_n) es una sucesión monótona y acotada, entonces es convergente. Llamemos $\ell = \lim u_n$. Para calcular el valor de

ℓ notemos que $u_{n+1}^2 = \frac{ab^2+u_n^2}{a+1}$ y entonces tomando límite obtenemos que

$$\begin{aligned}
\ell^2 = \frac{ab^2+\ell^2}{a+1} &\iff (a+1)\ell^2 = ab^2+\ell^2 \\
&\iff (a+1)\ell^2 - \ell^2 = ab^2 \\
&\iff \ell^2(a+1-1) = ab^2 \\
&\iff a\ell^2 = ab^2 \\
&\iff \ell^2 = b^2 \\
&\iff \ell = b.
\end{aligned}$$

La razón de las equivalencias es análoga a lo anterior.■
Nota: Queda como ejercicio para el lector verificar que $s_n \to s \Longrightarrow s_n^2 \to s^2$.